

TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**PREDICCIÓN Y RETRODICCIÓN DE SISTEMAS
CUÁNTICOS ABIERTOS CON MEMORIA TEMPORAL**

Alan Ricardo Zambrano Henríquez
Maestrando

Dr. Adrián A. Budini
Director

Miembros del Jurado
Dr. Gonzalo Álvarez (Instituto Balseiro)
Dr. Daniel Domínguez (Instituto Balseiro)
Dra. Karen Hallberg (Instituto Balseiro)

02 de Marzo de 2018

Física estadística e interdisciplinaria – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mi familia

A mis amigos del “FiEstIn” y externos al grupo

Por sobretodo dedicado a todos aquellos que hicieron esto posible

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	vii
Resumen	xi
Abstract	xiii
1. Introducción	1
2. Sistemas cuánticos abiertos	5
2.1. Sistemas clásicos irreversibles	5
2.1.1. Ecuaciones maestras clásicas	5
2.2. Sistemas cuánticos	7
2.2.1. Función de onda	7
2.2.2. Matriz densidad	7
2.2.3. Propiedades de la matriz densidad	9
2.2.4. Evolución unitaria	10
2.3. Sistemas cuánticos abiertos	12
2.3.1. Ecuaciones tipo Lindblad	13
2.3.2. Reservorios térmicos	13
2.3.3. Fluorescencia	19
2.4. Fluorescencia en reservorios con fluctuaciones clásicas	22
2.4.1. Fluctuaciones independientes	24
2.4.2. Fluctuaciones correlacionadas	27
2.5. Memoria temporal	29
3. Método de saltos cuánticos	31
3.1. Proceso de medición en sistemas cuánticos	31
3.1.1. Medidas proyectivas	32
3.1.2. Mediciones cuánticas en el contexto de matrices densidad	33
3.2. Teoría general de saltos cuánticos	34

3.2.1.	Dinámica de Lindblad en la representación vectorial	34
3.2.2.	Operadores matriciales de medidas	36
3.2.3.	Evolución condicional del estado vectorial cuántico	38
3.2.4.	Evolución estocástica del estado vectorial cuántico	39
3.2.5.	Generación de los tiempos de emisión	43
3.2.6.	Ecuación estocástica del estado vectorial cuántico	44
3.2.7.	Saltos cuánticos aplicados a reservorios con temperatura efectiva cero	45
3.2.8.	Saltos cuánticos en sistemas fluorescentes	49
3.2.9.	Método de saltos cuánticos para reservorios auto-fluctuantes . .	53
4.	Predicción y retrodicción	61
4.1.	Predicción	61
4.2.	Retrodicción	64
4.2.1.	Estado vectorial cuántico de pasado	67
4.3.	Pureza cuántica (sistema) y configuracional (baño)	68
4.4.	Retrodicción en sistemas fluorescentes acoplados a baños auto-fluctuantes	69
5.	Conclusiones	75
	Bibliografía	79
	Agradecimientos	81

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de un sistema de dos niveles clásico para la evolución de las poblaciones de cada estado, donde $\gamma_{RR'}$ es la tasa de transición para ir al estado R , dado que el sistema estaba en el estado R'	6
2.2. Poblaciones para un sistema clásico de dos niveles con, $\gamma_{21}/\gamma_{12} = 3$ y con poblaciones iniciales $P_1(0) = P_2(0) = 0.5$	6
2.3. Evolución de las poblaciones y magnitud de las coherencias para un sistema de dos niveles con un Hamiltoniano $H = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_x$, con estado inicial $\rho_0 = +\rangle\langle + $	12
2.4. Evolución de las poblaciones y coherencias (representación interacción) para un sistema de dos niveles con un Hamiltoniano $H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$, con estado inicial $\rho_0 = (\frac{ +\rangle+ -\rangle}{\sqrt{2}})(\frac{\langle + +\langle - }{\sqrt{2}})$, acoplado a un reservorio térmico con temperatura efectiva cero.	15
2.5. Diagrama de las transiciones para un sistema de dos niveles acoplados a un reservorio térmico. Las tasas de decaimiento y de excitación son γ y β , respectivamente.	16
2.6. Poblaciones y coherencias para un sistema de dos niveles en la representación interacción en el régimen de (a) altas temperaturas ($\beta/\gamma = 1$), y (b) en el régimen de bajas temperaturas ($\beta/\gamma = 0.2 \ll 1$).	18
2.7. Diagrama de un sistema de dos niveles ($ +\rangle, -\rangle$), con tasa de decaimiento “ γ ” y frecuencia natural ω_0 , el cual es sometido a radiación electromagnética de frecuencia ω_l	19
2.8. Evolución de las poblaciones y coherencias de la matriz densidad de un sistema fluorescente bajo la representación interacción [Ec.(2.48)]. La condición inicial es $\rho(0) = -\rangle\langle - $ ($p(0) = c(0) = 0, q(0) = 1$). Los parámetros son (a) $\Omega/\gamma = 0.7$ y (b) $\Omega/\gamma = 3$, respectivamente	21

2.9. Esquema de un sistema fluorescente de dos niveles en presencia de un baño auto-fluctuante, (Ec.2.61), dotado con dos estados configuracionales a , b . El estado superior e inferior del sistema están denotados con $ +\rangle$ y $ -\rangle$ respectivamente. Los parámetros γ_a y γ_b son las tasas de decaimiento natural del sistema correspondiente a cada estado configuracional. γ_{ab} y γ_{ba} son las tasas de transición entre los estados del baño. ω_l es la frecuencia del láser externo y Ω mide el acoplamiento unitario del mismo con el sistema. Las flechas exteriores simbolizan los fotones radiados por el sistema.	24
2.10. Evolución, en la representación interacción, (a) de la probabilidad configuracional del baño, y (b) evolución de la población superior del sistema para el caso de reservorios autofluctuantes para un sistema fluorescente de dos niveles. Los parámetros son $\gamma_a/\Omega = 1$, $\gamma_b/\Omega = 10$, y $\gamma_{ab}/\Omega = 0.003$, $\gamma_{ba}/\Omega = 0.009$. La condición inicial es $\rho_a(0) = \rho_b(0) = 0.5 -\rangle\langle - $	26
2.11. Evolución, en la representación interacción, (a) de la probabilidad configuracional del baño, y (b) evolución de la población superior del sistema, para el caso de medio-ambientes asistidos por luz [Ecs.(2.66a) y (2.66b)]. Los parámetros son $\{\gamma_a/\Omega = 1.8, \gamma_b/\Omega = 0.15\}$ y de transición entre configuraciones del baño $\{\gamma_{ab}/\Omega = 0.35, \gamma_{ba}/\Omega = 0.2\}$, con condición inicial $\rho_a(0) = \rho_b(0) = 0.5 -\rangle\langle - $	28
3.1. Realización estocástica de la población superior del sistema cuando el estado inicial es (a) $ +\rangle\langle + $, y (b) cuando el estado inicial del sistema es el estado mezcla $\frac{1}{2}(+\rangle\langle + + -\rangle\langle -)$. La temperatura efectiva del reservorio es nula.	47
3.2. (a) “Survival” y (b) “Waiting” para un sistema de dos niveles con separación entre niveles en el régimen óptico, dinámica en la representación de interacción y tasa de decaimiento natural “ γ ” entre niveles cuando se prepara el sistema en el estado mezcla $\rho_0 = p +\rangle\langle + + (1-p) -\rangle\langle - $	48
3.3. Promedio con 50 realizaciones de la evolución de la población superior del sistema [Fig.(3.1)] usando el método de saltos cuánticos para un sistema de dos niveles con tasa de decaimiento γ en contacto con un reservorio térmico a temperatura efectiva cero cuando (a) está preparado con condición inicial $\rho_0 = +\rangle\langle + $ y (b) con condición inicial $\rho_0 = (1/2)\mathcal{I}$	49
3.4. (a) “Survival” y (b) “Waiting” para un sistema fluorescente en resonancia con un láser externo. El parámetro de acoplamiento dipolo-campo eléctrico esta dado por $\Omega/\gamma = 3$, donde γ es la tasa de decaimiento. La condición inicial es $\rho_0 = -\rangle\langle - $ y las medidas son realizadas por un fotodetector con operador de medida Ec.(3.69).	51

3.5. Realización estocástica para la población superior del sistema cuando se prepara en $\rho_0 = -\rangle\langle - $ y el parámetro de acoplamiento dipolo-campo eléctrico respecto a la tasa de decaimiento natural γ del sistema es $\Omega/\gamma = 3$	52
3.6. Promedio sobre 200 realizaciones para (a) la población superior del sistema y (b) coherencia en la dinámica de fluorescencia cuando el sistema se prepara en el estado $\rho_0 = -\rangle\langle - $. Los parámetros son $\Omega/\gamma = 3$. . .	53
3.7. (a) “Survival” y (b) “waiting” como función de $\Omega(t-t')$, de la dinámica de un sistema fluorescente de dos niveles en el régimen óptico, en resonancia con un láser externo con parámetro de acoplamiento Ω y en contacto con un reservorio térmico estructurado y autofluctuante entre dos estados mesoscópicos configuracionales $R = \{a, b\}$ cuando luego de cada detección, ocurrida en un tiempo t' , el sistema parte del estado separable $ -\rangle\langle - P_{t'}$ con estados configuracionales del baño $ P_{t'}\rangle = p a\rangle + (1-p) b\rangle$, para valores $p = \{0, 0.5, 1\}$	58
3.8. Realizaciones estocásticas para la dinámica del reservorio autofluctuante estudiado [Ec.(3.81)]. (a) Realización de la población superior del sistema $\langle + \rho_t^{\text{st}} + \rangle$ y (b) realización de la población configuracional superior del baño ($a P_a^{\text{st}}(t)\rangle$). Con valores de parámetros para tasas de decaimiento natural del sistema $\gamma_a/\Omega = 1$, $\gamma_b/\Omega = 10$ cuando el baño está en la configuración “a” o “b” respectivamente; tasas de transición entre configuraciones del baño “ $b \rightarrow a$ ” $\gamma_{ab}/\Omega = 0.03$, “ $a \rightarrow b$ ” $\gamma_{ba}/\Omega = 0.09$. .	59
3.9. Promedio en 1020 realizaciones de (a) la población superior estocástica del sistema y (b) promedio sobre las poblaciones configuracionales del baño, cuando se prepara el sistema-baño en $ \rho_0\rangle = -\rangle\langle - [1/2 a\rangle + 1/2 b\rangle]$, bajos los mismos parámetros de la Fig.(3.8).	60
4.1. Realización estocástica del baño para el estado configuracional $R = a$ usando predicción (azul) y retrodicción (rojo). Los parámetros son $\gamma_a/\Omega = 1$, $\gamma_b/\Omega = 10$, $\gamma_{ab}/\Omega = 0.03$, $\gamma_{ba}/\Omega = 0.09$. La condición inicial del estado vectorial es $ \rho_0^{\text{st}}\rangle = -\rangle\langle - a\rangle$. Para retrodicción, a cada tiempo t , se tomó T tal que $\Omega(T-t) = 20$	70
4.2. Realización de la pureza del baño, usando predicción (azul) y retrodicción (rojo). Los parámetros y condición inicial son los mismos que en la figura anterior.	70
4.3. Realización de la población superior del sistema, con predicción y retrodicción. Los parámetros y condición inicial son los mismos que en las figuras anteriores.	71

4.4. Realización de la pureza del sistema, usando tanto predicción (azul) como retrodicción (rojo).	71
4.5. Purezas promedio (300 realizaciones) para el sistema S (a), y promedio de la pureza configuracional del baño C (b) ambas usando tanto el método de predicción como retrodicción.	72

Resumen

Los sistemas cuánticos abiertos pueden observarse continuamente en el tiempo, esto es, un aparato de medición está continuamente acoplado al sistema, esto es, el aparato de medición (de forma ideal) está midiendo el sistema durante todo el intervalo de tiempo de observación. El proceso de medición provee una señal estocástica clásica a partir de la cual es posible inferir cuál es el estado del sistema. Un ejemplo paradigmático es el caso de un sistema de dos niveles acoplado a un campo de radiación láser externa (sistema fluorescente) donde el aparato de medida es un detector de fotones. Recientemente, se estudió la posibilidad de usar en la reconstrucción del estado del sistema, no solo la información provista por la medición a tiempos anteriores (predicción), sino también la señal posterior en el futuro (retrodicción). El objetivo de este trabajo es estudiar dicho problema para el caso en que la dinámica del sistema presenta efectos de memoria (no-Markoviana). La dinámica efectiva corresponde a un sistema fluorescente acoplado a un reservorio dotados de distintos estados mesoscópicos cuya dinámica estocástica es clásica. Cada estado a su vez influencia la dinámica irreversible del sistema. Demostramos que, aún cuando el aparato de medida solo provee información sobre la dinámica cuántica, la pureza de los estados del baño y del sistema son incrementadas usando la técnica de retrodicción.

Palabras clave: sistemas cuánticos abiertos, saltos cuánticos, predicción y retrodicción

Abstract

Open quantum system can be continually monitored in time. A measurement apparatus is continuously coupled to the system. The measurement process provides a classical stochastic signal which allows to infer the system state. A paradigmatic example is the case of an optical two-level system coupled to the radiation of an external laser field (fluorescent system), where the measurement apparatus is a photon detector. In the last years, the reconstruction of the system state was studied not only by considering the previous past measurement signal (*prediction*) but also including the future signal (*retrodiction*). The goal of this thesis is to study this problem in the case in which the quantum system dynamics develops memory effects (non-Markovian). The effective dynamics corresponds to a fluorescent system coupled to an environment endowed with different mesoscopic states whose stochastic dynamics is classical. In turn, each state modifies the time-irreversible system dynamics. We find that, even when the measurement apparatus only provides information about the quantum dynamics, the purity of the reservoir states and the purity of the system increases by using the retrodiction technique.

Keywords: open quantum systems, quantum jumps, prediction and retrodiction

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas cuánticos abiertos [1] están inherentemente acoplados a su entorno, lo cual a su vez transforma la dinámica unitaria en una irreversible en el tiempo. Cuando el tiempo de correlación de las fluctuaciones del reservorio es la menor escala de la dinámica conjunta, y en un régimen de acoplamiento débil, es posible realizar una aproximación Markoviana. En dicho caso la evolución del sistema, descrita por medio de su matriz densidad, obedece una *ecuación tipo Lindblad* [1]. Estas ecuaciones dan la estructura más general para la evolución de la matriz densidad bajo las condiciones de hermeticidad y positividad de la misma (matriz hermítica definida positiva). Las ecuaciones de Lindblad proveen un formalismo eficiente para describir, por ejemplo, la dinámica del decaimiento natural de una transición óptica [1–4]. Aquí el entorno es el campo electromagnético de vacío el cual, mediante un acoplamiento dipolo eléctrico-campo eléctrico, induce el decaimiento del sistema. Las ecuaciones de Lindblad también cubren el caso en que el sistema está acoplado a un campo de radiación láser externo (sistema fluorescente) [1–4].

Los sistemas cuánticos abiertos pueden ser monitoreados continuamente en el tiempo. Esto es, el mismo está continuamente sometido en el tiempo a un proceso de medición. En consecuencia, el aparato de medida provee una señal clásica en el tiempo. Debido a la aleatoriedad del proceso de medición cuántica y al acoplamiento con el entorno, su dependencia temporal es estocástica. Un ejemplo típico es un sistema fluorescente. Debido a la acción conjunta del baño y del campo láser externo el sistema radía continuamente fotones [1–4]. El aparato de medición es un detector de fotones. Así, la señal de medición corresponde a los tiempos en que ocurren las foto-detecciones.

Dado que el sistema esta acoplado continuamente en el tiempo al aparato de medición, uno puede preguntarse sobre cuál es el estado (función de onda o matriz densidad) del sistema. Esta pregunta dio lugar a la formulación del *método de saltos cuánticos* [1–4]. Aquí el problema consiste en inferir el estado del sistema a partir de la señal

de medición. Dado que esta última es estocástica, el estado hereda esta propiedad, dando lugar a una función de onda estocástica (o matriz densidad estocástica) [1–4]. Su evolución está estrechamente ligada al proceso de medición. Por ejemplo, para un sistema fluorescente cada detección implica el colapso de estado del sistema a un estado de menor energía (“quantum jump”). Entre foto-detecciones la evolución es determinista pero no unitaria, representando la misma el cambio del estado del sistema dado que conocemos que no hay detección alguna. Coherentemente, al promediar sobre realizaciones del estado del sistema, lo cual es equivalente a promediar sobre distintas realizaciones del proceso de medición, se recupera la evolución dada por la ecuación de Lindblad. Así, desde un punto de vista teórico, las realizaciones del sistema pueden deducirse descomponiendo la ecuación de Lindblad mediante una serie tipo Dyson, donde cada término representara distintas realizaciones caracterizadas por el número de detecciones en un dado intervalo de tiempo. El peso de cada contribución puede a su vez relacionarse con la probabilidad conjunta para los tiempos de ocurrencia de las emisiones. A partir de esta última es posible a su vez construir un algoritmo explícito para generar numéricamente las realizaciones estocásticas del estado del sistema. En el caso de sistemas fluorescentes, el proceso de saltos cuánticos es un *proceso de renovación*. Esto es, los sucesivos eventos de medición son independientes y una única densidad de probabilidad (“waiting time distribution”) define la estadística para el intervalo de tiempo entre eventos sucesivos.

Desde un punto de vista estadístico, el método de saltos cuánticos consiste en la *predicción* del estado del sistema dada la información pasada del proceso de medición. Recientemente también se generalizó a sistemas cuánticos una técnica de *retrodicción* [5]. Aquí, además de la información del pasado, se considera la señal de medición en un intervalo futuro para mejorar la estimación del estado del sistema a un dado tiempo. La nueva inferencia es conocida como *smoothed quantum state* (estado cuántico suavizado) debido a que la retrodicción disminuye la incerteza (fluctuaciones) del estado inferido. Esta técnica ha recibido un creciente interés en la literatura reciente [5–16]. El objetivo de esta tesis estará centrado en dicha técnica y sus formalismos asociados.

Consideraremos un sistema fluorescente cuya dinámica presenta *efectos de memoria*. Esto es, la dinámica de su matriz densidad contiene términos de memoria que van más allá de la teoría estandar de ecuaciones tipo Lindblad. Como situación física que da lugar a esta característica consideraremos un sistema fluorescente acoplado a un reservorio estructurado, estando el mismo caracterizado por distintos estados mesoscópicos. Cada estado del baño da lugar a un cambio en la dinámica del sistema. A su vez, los estados del baño están acoplados mediante transiciones estocásticas clásicas. Así, la dinámica (matriz densidad) del sistema dependerá en forma estocástica del

estado mesoscópico del baño.

La situación descrita anteriormente se da, por ejemplo, en casos donde el sistema fluorescente (una transición óptica de dos niveles) está soportado por una macromolécula compleja, donde sus cambios internos modifican la interacción del sistema cuántico con el campo electromagnético de vacío. Así la señal de fluorescencia puede usarse para monitorear (inferir) los distintos estados de la macromolécula (single-molecule spectroscopy) [17]. Dichos cambios pueden alterar la frecuencia natural del sistema o alternativamente su tasa de decaimiento natural. En ambos casos, los cambios en la intensidad de la señal de fluorescencia pueden correlacionarse con los cambios estructurales de la macromolécula.

Una descripción efectiva de los cambios estructurales del baño puede lograrse a través de una generalización de las ecuaciones de Lindblad [18, 19]. La misma consiste en introducir una serie de estados auxiliares (en el espacio de Hilbert del sistema), cada uno de los cuales representa la dinámica del sistema *condicionada* a que el baño está en un dado estado. Las fluctuaciones del baño se capturan mediante un acoplamiento (de origen clásico) entre los estados auxiliares. La dinámica de los estados auxiliares es local en el tiempo y puede considerarse como la evolución de un sistema bipartito [20, 21] o híbrido definido por la transición óptica y los estados del baño. El estado del sistema está definido por la adición de los estados auxiliares, siendo en consecuencia su evolución de tipo no-Markoviana.

La dinámica híbrida también puede descomponerse en una serie de trayectorias asociadas a las distintas realizaciones del proceso de medición del sistema (detección de fotones emitidos). Esta generalización del método de saltos cuánticos [22] permite inferir el estado del sistema híbrido y en consecuencia también inferir (predecir) el estado de la transición óptica y las probabilidades de ocupación de los distintos estados del baño. A diferencia de los sistemas fluorescentes estándar, aquí la densidad de probabilidad (waiting time distribution) para el intervalo de tiempo entre eventos sucesivos (foto-detecciones) va cambiando en forma aleatoria a lo largo de una realización.

El problema central a caracterizar será la inferencia de los estados del sistema y del baño usando no solo la señal de medición del pasado (predicción) sino también información de la señal en un dado intervalo futuro (retrodicción). Además de la formulación del problema demostraremos que la retrodicción nos permite obtener una estimación del sistema-estados configuracionales donde la pureza (equivalentemente entropía) del estado del sistema y la pureza de los estados del baño son superiores con respecto al caso de predicción, esto es, donde la inferencia solo usa información del pasado.

Específicamente, nuestra dinámica de interés será un sistema fluorescente acoplado a un baño con distintos estados configuracionales, los cuales a su vez modifican la dinámica del sistema. El acoplamiento entre los estados del baño es clásico. Suponiendo que un detector de fotones mide la radiación fluorescente del sistema, nuestro problema será estimar, a un dado tiempo, tanto el estado del sistema y de los estados configuracionales (probabilidades) usando para ello tanto los resultados anteriores (predicción) como en el futuro (retrodicción). Además estudiaremos cómo la técnica de retrodicción aventaja a predicción. Como medidas de comparación usaremos la pureza cuántica del sistema como así también la “pureza clásica” de los estados configuracionales del baño.

Tenemos que destacar que recientemente en la literatura se ha estudiado predicción y retrodicción en sistemas fluorescentes. Por ejemplo en la Ref. [15], Guevara y Wiseman estudiaron retrodicción mediante una detección homodina [1–4] de un sistema fluorescente con pérdidas. Este tipo de medición no será estudiado en el presente trabajo. Por otro lado, en la Ref. [16] se estudió predicción y retrodicción pero observando el sistema con un aparato foto-detector ineficiente. En dicho caso, la dinámica del sistema fluorescente es Markoviana. En contraste, el interés de nuestra tesis será enfocada usando un detector ideal y donde la dinámica de nuestro sistema cuántico es no-Markoviana. Esta propiedad es debida a la forma estructurada del baño al cual está acoplado nuestro sistema. Sin embargo, el formalismo teórico que usaremos será el mismo que el usado en la Ref. [16].

La tesis será desarrollada de la siguiente forma. En el capítulo 2 veremos las ecuaciones tipo Lindblad. Estudiaremos el decaimiento natural de un sistema como así también la ecuación que describe un sistema fluorescente. También expondremos las ecuaciones de Lindblad generalizadas que proveen el marco teórico para describir la interacción con un baño caracterizado por distintos estados mesoscópicos. En el capítulo 3, luego de repasar mediciones cuánticas generalizadas, estudiaremos el método de saltos cuánticos para las ecuaciones de Lindblad generalizadas. Aplicaremos el mismo a las dinámicas mencionadas anteriormente. En el capítulo 4, estudiaremos predicción y retrodicción para las dinámicas con baños clásicamente fluctuantes.

Capítulo 2

Sistemas cuánticos abiertos

2.1. Sistemas clásicos irreversibles

2.1.1. Ecuaciones maestras clásicas

Dado un sistema clásico definido por un conjunto discreto de estados $\{R\}_{R=1}^{R_{\text{máx}}}$, su comportamiento estadístico e irreversible en el tiempo puede describirse por una ecuación maestra. La probabilidad $P_R(t)$ de encontrar el sistema a tiempo t en el estado R , $0 \leq P_R(t) \leq 1$, obedece una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo

$$\frac{dP_R(t)}{dt} = \sum_{R' \neq R} \gamma_{RR'} P_{R'}(t) - \sum_{R' \neq R} \gamma_{R'R} P_R(t), \quad (2.1)$$

donde el primer y segundo término corresponden a “ganancia” y a “pérdida” de probabilidad hacia o desde el estado R , respectivamente. Los coeficientes $\gamma_{RR'} \geq 0$ son cantidades positivas que dan las tasas de transición por unidad de tiempo entre los estados del sistema.

Como ejemplo consideremos un sistema de dos niveles ($R_{\text{máx}} = 2$) [Fig.(2.1)], descrito por la siguiente ecuación maestra

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = \gamma_{12} P_2(t) - \gamma_{21} P_1(t), \quad (2.2a)$$

$$\frac{d}{dt} P_2(t) = \gamma_{21} P_1(t) - \gamma_{12} P_2(t). \quad (2.2b)$$

La solución de este par de ecuaciones puede obtenerse mediante la transformada de Laplace, definida como $\mathcal{L}[f](u) = \tilde{f} = \int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt$, lo cual da lugar a las siguientes ecuaciones algebraicas,

$$u P_1(u) - P_1(0) = \gamma_{12} P_2(u) - \gamma_{21} P_1(u), \quad (2.3)$$

$$u P_2(u) - P_2(0) = \gamma_{21} P_1(u) - \gamma_{12} P_2(u). \quad (2.4)$$

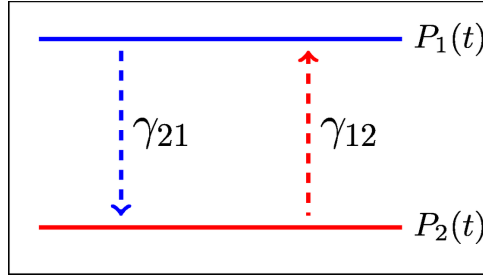


Figura 2.1: Ejemplo de un sistema de dos niveles clásico para la evolución de las poblaciones de cada estado, donde $\gamma_{RR'}$ es la tasa de transición para ir al estado R , dado que el sistema estaba en el estado R'

Su solución, y posterior transformada inversa de Laplace, viene dada por:

$$P_1(t) = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{21} + \gamma_{12}} + \left(\frac{P_1(0)\gamma_{21} - P_2(0)\gamma_{12}}{\gamma_{21} + \gamma_{12}} \right) e^{-(\gamma_{21} + \gamma_{12})t}, \quad (2.5a)$$

$$P_2(t) = \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{21} + \gamma_{12}} - \left(\frac{P_1(0)\gamma_{21} - P_2(0)\gamma_{12}}{\gamma_{21} + \gamma_{12}} \right) e^{-(\gamma_{21} + \gamma_{12})t}, \quad (2.5b)$$

donde $P_1(0) + P_2(0) = 1$. Estas ecuaciones [Ecs.(2.2a) y (2.2b)] dan lugar a la existencia de un estado estacionario $P_R^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t)$ para ambas poblaciones, lo cual corresponde al primer término de los miembros derechos de las ecuaciones anteriores,

$$P_1^\infty = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{21} + \gamma_{12}}, \quad P_2^\infty = \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{21} + \gamma_{12}}. \quad (2.6)$$

La existencia de un estado estacionario es consecuencia directa del carácter irreversible de su evolución. El tiempo característico para alcanzar dicho estado solo involucra las tasas de transición entre los estados del sistema, tal como se puede leer de las Ecs. (2.5a) y (2.5b). Dichos comportamientos son mostrados en la Fig.(2.2)

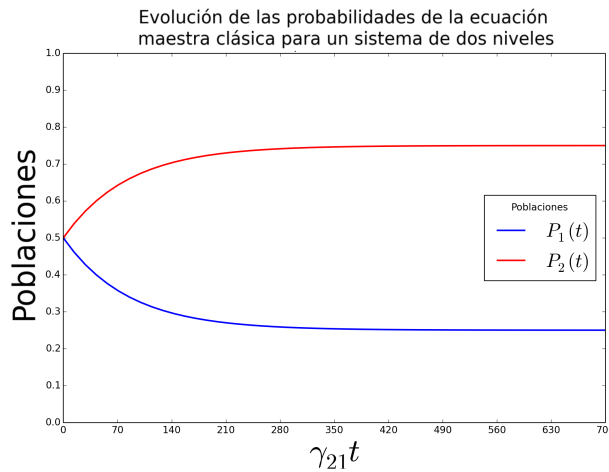


Figura 2.2: Poblaciones para un sistema clásico de dos niveles con, $\gamma_{21}/\gamma_{12} = 3$ y con poblaciones iniciales $P_1(0) = P_2(0) = 0.5$.

2.2. Sistemas cuánticos

2.2.1. Función de onda

A diferencia de los sistemas clásicos con dinámicas irreversibles (ecuaciones maestras), ahora estaremos interesados en caracterizar sistemas cuánticos con dinámicas reversibles. Para ello, haremos uso de la función de onda. La misma es una descripción matemática para el estado cuántico de un sistema físico. Ésta, junto con las reglas de evolución del sistema, proveen toda la información necesaria para describir el sistema, esto es, las distribuciones de probabilidad, y el resultado de las mediciones de un observable arbitrario.

Matemáticamente, la función de onda, comúnmente denotada con la letra ψ , representa una amplitud de probabilidad, la cual pertenece al espacio de Hilbert \mathcal{H} que describe el sistema. Su evolución temporal está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.7)$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema. La condición inicial es $|\psi(t)\rangle|_{t=0} = |\psi(0)\rangle$.

Una descripción en términos de la función de onda solo es posible cuando se tiene máxima información de la condición inicial del sistema. Cuando esto no es posible, la descripción del sistema debe hacerse en términos de la *matriz densidad* del sistema.

2.2.2. Matriz densidad

Como vimos anteriormente, el estado del sistema puede ser descrito por el vector de estado o el ket función de onda $|\psi\rangle$. En este contexto, un sistema cuántico que está completamente descrito por este ket (y la dinámica del sistema con sus condiciones iniciales respectivas), se dice que está en un *estado puro*. En otras palabras, un estado puro está caracterizado por la existencia de un experimento de preparación en el que, con certeza, el sistema se encuentra en uno y solo un estado cuántico [23]. Sin embargo, usualmente en la práctica, el sistema puede encontrarse distribuido en un ensemble estadístico de diferentes vectores de estados: por ejemplo, el mismo tiene una probabilidad “ p ” de estar en el estado $|\psi\rangle$, y probabilidad “ $(1 - p)$ ” de estar en el estado $|\phi\rangle$. Este sistema se dice que está en un *estado mezcla*.

Es importante resaltar el hecho de que estas probabilidades se refieren a probabilidades en el sentido clásico-estadístico, a diferencia de las probabilidades cuánticas provenientes del principio de superposición cuántico. Dicha diferencia es visible, por ejemplo, en la superposición de los autoestados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de la matriz de Pauli Z

(y con autovalores $\{+1/2, -1/2\}$ respectivamente) denotada por $|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|+\rangle + e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})|-\rangle$, el cual no puede corresponderse con una descripción en términos de las probabilidades $\{p, 1-p\}$ de un ensemble estadístico.

En general, un ensemble de estados cuánticos $\{|\alpha\rangle, W_\alpha\}$, se define a partir de un conjunto de funciones de onda puras $\{|\alpha\rangle\}$ que componen al sistema físico, y pesos estadísticos normalizados $\{W_\alpha\}$ asociados a cada una de ellas proveniente de la incerteza en la preparación del sistema. A partir de ésto, podemos definir un operador que llamaremos *operador densidad* o *matriz densidad* del sistema

$$\rho = \sum_{\alpha} W_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.8)$$

donde la suma es sobre todos los elementos presentes en el ensamble de estados. Este objeto describe completamente el estado del sistema.

Dado un espacio de Hilbert (que por simplicidad está generado por un conjunto finito contable de estados), con base $\{|n\rangle\}$ ortonormal y completa,

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (2.9a)$$

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1, \quad (2.9b)$$

cada estado del ensemble puede desarrollarse en la misma como

$$|\alpha\rangle = \sum_n \alpha_n |n\rangle. \quad (2.10)$$

Entonces, la matriz densidad queda expresada como

$$\rho = \sum_{\alpha} \sum_{n,m} W_{\alpha} \alpha_n \alpha_m^* |n\rangle\langle m|, \quad (2.11)$$

donde ahora los elementos matriciales $\langle n|\rho|m\rangle = \sum_{\alpha} W_{\alpha} \alpha_n \alpha_m^*$, determinan completamente la matriz densidad del sistema.

Seguidamente, recordando que para el caso de sistemas cuánticos en un estado puro $|\alpha\rangle$, el valor esperado de un observable \hat{A} para este sistema viene dado por $\langle \hat{A} \rangle = \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle$, en este nuevo contexto, debemos considerar este valor esperado pesado ahora sobre los elementos del ensemble, es decir:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\alpha} W_{\alpha} \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle, \quad (2.12)$$

Usando la relación de completitud de la base del espacio [Eq.(2.9b)], obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle &= \sum_{\alpha} W_{\alpha} \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle = \sum_{\alpha} W_{\alpha} \langle \alpha | \hat{A} \left(\sum_n |n\rangle \langle n| \right) | \alpha \rangle \\
&= \sum_n \sum_{\alpha} W_{\alpha} \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{A} | n \rangle = \sum_n \langle n | \left(\sum_{\alpha} W_{\alpha} | \alpha \rangle \langle \alpha | \right) \hat{A} | n \rangle \quad (2.13) \\
&= \text{Tr}(\rho \hat{A}).
\end{aligned}$$

Entonces, valores esperados se definen a partir de la matriz densidad ρ .

2.2.3. Propiedades de la matriz densidad

Una matriz ρ , se dice que es una matriz densidad si y solo si satisface las siguientes propiedades:

- La matriz densidad es un operador Hermítico, es decir: $\rho^{\dagger} = \rho$; esto es, que sus elementos matriciales en una base satisfacen:

$$\rho_{nm} \equiv \langle n | \rho | m \rangle = \langle m | \rho | n \rangle^*. \quad (2.14)$$

- La matriz densidad está normalizada: $\text{Tr}(\rho) = 1$.
- ρ es un operador definido positivo, es decir: $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$, para cualquier ket $|\phi\rangle$ del espacio de estados.

Como consecuencia de las propiedades anteriores, que pueden ser tomadas como la definición del operador densidad, se puede demostrar que la matriz densidad satisface las siguientes relaciones:

- La probabilidad $W(\psi)$, de encontrar al sistema en un estado arbitrario puro $|\psi\rangle$, después de una medición, está dada por

$$W(\psi) = \langle \psi | \rho | \psi \rangle. \quad (2.15)$$

- A partir del cálculo del valor de expectación de un observable \hat{A} , en términos de la matriz densidad del sistema, se puede extender esto para definir el valor esperado de cualquier operador \hat{Q} (sea éste un observable o no) de acuerdo a la expresión:

$$\langle \hat{Q} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{Q}). \quad (2.16)$$

- La matriz densidad correspondiente a un estado puro $|\psi\rangle$, está dada por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.17)$$

- Una medida de la *pureza* de un estado se puede definir, de forma natural, como:

$$P = \text{Tr}(\rho^2); \quad (2.18)$$

ya que la misma, se demuestra inmediatamente que toma el valor $P = 1$ cuando el estado es puro y $P < 1$ en cualquier otro caso.

2.2.4. Evolución unitaria

Recordemos que la evolución temporal del estado de un sistema cuántico está descrito por la ecuación de Schrödinger [20]

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (2.19)$$

A partir de aquí, definiendo el *operador evolución temporal unitario* $U(t)$, la solución de la función de onda a tiempo t con condición inicial $|\psi(0)\rangle$ puede escribirse como

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle. \quad (2.20)$$

Insertando ésto en la ecuación de Schrödinger obtenemos,

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H U(t), \quad (2.21)$$

cuya solución es $U(t) = \exp[-i\hbar H t]$, donde se asume que el Hamiltoniano es independiente del tiempo. Usando la definición de la matriz densidad, obtenemos para su evolución:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H, \rho(t)], \quad (2.22)$$

donde $[H, \rho(t)]$, representa el conmutador del Hamiltoniano del sistema con el operador densidad. Esta última ecuación es conocida como la ecuación de Liouville. Su solución formal es

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U(t)^\dagger, \quad (2.23)$$

donde $\rho(0)$ es la matriz densidad inicial.

Tuneamiento cuántico en un sistema de dos niveles

Como ejemplo de evolución unitaria consideraremos el Hamiltoniano

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_x, \quad (2.24)$$

donde σ_x es la matriz de Pauli x . Las matrices de Pauli están definidas como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

que corresponden a las expresiones donde σ_z es diagonal.

Dado el carácter no-diagonal de σ_x , en la base de autoestados de σ_z , el sistema realiza un proceso de tuneamiento entre dichos estados, esto es, la población se transfiere entre los mismos de una manera reversible en el tiempo. Para caracterizar explícitamente dicho comportamiento, escribimos la matriz densidad $\rho(t)$ en la base de autoestados de σ_z $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ como

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \langle +|\rho(t)|+ \rangle & \langle +|\rho(t)|- \rangle \\ \langle -|\rho(t)|+ \rangle & \langle -|\rho(t)|- \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(t) & c(t) \\ c^*(t) & q(t) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

La ecuación de Liouville [Ec.(2.22)] da lugar a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = -\frac{i\Omega}{2}(c^*(t) - c(t)), \\ \frac{d}{dt}q(t) = -\frac{i\Omega}{2}(c(t) - c^*(t)), \\ \frac{d}{dt}c(t) = -\frac{i\Omega}{2}(p(t) - q(t)), \\ \frac{d}{dt}c^*(t) = +\frac{i\Omega}{2}(p(t) - q(t)). \end{cases} \quad (2.27)$$

Como podemos ver de las ecuaciones anteriores, el Hamiltoniano del sistema acopla las poblaciones superiores e inferiores, $p(t)$ y $q(t)$ respectivamente, a través de las coherencias del sistema, $c(t)$ y su complejo conjugada $c^*(t)$. Las soluciones explícitas vienen dadas por

$$\begin{aligned} p(t) &= \left(\frac{p(0)+q(0)}{2} \right) + \left(\frac{p(0)-q(0)}{2} \right) \cos(\Omega t) + i \left(\frac{c(0)-c^*(0)}{2} \right) \sin(\Omega t), \\ q(t) &= \left(\frac{p(0)+q(0)}{2} \right) - \left(\frac{p(0)-q(0)}{2} \right) \cos(\Omega t) - i \left(\frac{c(0)-c^*(0)}{2} \right) \sin(\Omega t), \\ c(t) &= \left(\frac{c(0)+c^*(0)}{2} \right) + \left(\frac{c(0)-c^*(0)}{2} \right) \cos(\Omega t) + i \left(\frac{p(0)-q(0)}{2} \right) \sin(\Omega t), \\ c^*(t) &= \left(\frac{c(0)+c^*(0)}{2} \right) - \left(\frac{c(0)-c^*(0)}{2} \right) \cos(\Omega t) - i \left(\frac{p(0)-q(0)}{2} \right) \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

De las ecuaciones anteriores [Ecs.(2.28)] podemos ver que de hecho las poblaciones

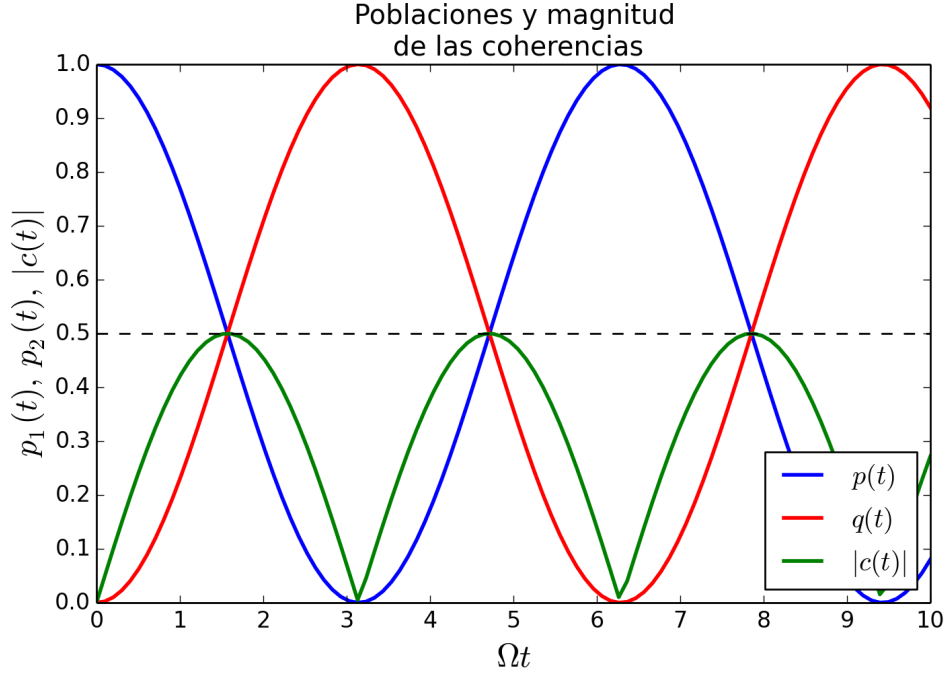


Figura 2.3: Evolución de las poblaciones y magnitud de las coherencias para un sistema de dos niveles con un Hamiltoniano $H = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_x$, con estado inicial $\rho_0 = |+\rangle\langle +|$.

del sistema oscilan en contrafase con frecuencia Ω dada por el Hamiltoniano del sistema.

En la Fig.(2.3) se muestra el comportamiento de las poblaciones y coherencias del sistema. Es de notar que en este caso no existe una solución estacionaria. De hecho todos los elementos de matriz oscilan. Dicha propiedad es consecuencia de la reversibilidad temporal de la evolución, lo cual contrasta con los comportamientos irreversibles mostrados en la Fig. (2.2).

2.3. Sistemas cuánticos abiertos

Los sistemas cuánticos abiertos, a diferencia de los sistemas estudiados en la sección anterior, interactúan con el entorno. Ésto hace que la evolución de la matriz densidad no sea una evolución del tipo unitaria, Eq. (2.22), convirtiéndola en irreversible.

Desde un punto de vista microscópico, la descripción de la evolución debe hacerse teniendo en cuenta los grados de libertad del entorno o baño. Desde dicha evolución unitaria, la evolución de la matriz densidad del sistema se obtiene luego de trazar o marginar la información del baño. Dicho procedimiento, conocido como aproximación de Born-Markov [1, 2], da lugar a una evolución para la matriz densidad que es lineal e irreversible en el tiempo.

Desde un punto de vista matemático puede determinarse cuál es la evolución más

general para la matriz densidad basándose solamente en las propiedades de la misma. Esto es, la evolución debe preservar su hermiticidad, la traza, y su positividad. La solución de este problema da lugar a las ecuaciones tipo Lindblad [1]. Las ecuaciones que surgen de la aproximación de Born-Markov están abaracadas dentro de este tipo de ecuaciones.

2.3.1. Ecuaciones tipo Lindblad

Las ecuaciones de tipo Lindblad son una generalización de las evoluciones unitarias y dan lugar a comportamientos irreversibles en el tiempo. La matriz densidad del sistema a un tiempo arbitrario no es en general un estado puro. La evolución de la matriz densidad del sistema viene dada por

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + L[\rho(t)], \quad (2.29)$$

donde $L[\bullet]$ es un superoperador que actúa sobre $\rho(t)$ y tiene la estructura [1]:

$$L[\bullet] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} a_{\alpha\beta} \left([V_\alpha, \bullet V_\beta^\dagger] + [V_\alpha \bullet, V_\beta^\dagger] \right), \quad (2.30)$$

donde $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^{N^2-1}$, con $N^2 = (\dim \mathcal{H})^2$, forman una base de operadores en el espacio de Hilbert del sistema. Además, los coeficientes $a_{\alpha\beta}$ forman una matriz hermítica definida semi-positiva. La misma caracteriza los tiempos de escala de disipación y decoherencia del sistema.

El superoperador $L[\bullet]$ se puede reescribir de la siguiente forma

$$L[\bullet] = -\{D, \bullet\}_+ + J[\bullet], \quad (2.31)$$

donde $\{A, B\}_+ = AB + BA$, es la operación de anticonmutación, y se han definido

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} a_{\alpha\beta} V_\beta^\dagger V_\alpha, \quad J[\bullet] = \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} a_{\alpha\beta} V_\alpha \bullet V_\beta^\dagger. \quad (2.32)$$

Esta notación resultará de utilidad en los desarrollos posteriores.

2.3.2. Reservorios térmicos

Como ejemplo de evoluciones tipo Lindblad, describiremos evoluciones que representan la interacción del sistema con reservorios térmicos.

Temperatura efectiva cero

Como sistema que evoluciona de manera naturalmente irreversible, y como caso más simple no-trivial, estudiaremos la evolución al equilibrio de un sistema cuántico de dos niveles a temperatura efectiva cero. Denotaremos con $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ el estado superior e inferior del sistema respectivamente. En dicha base, el Hamiltoniano puede escribirse como

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \quad (2.33)$$

donde $\omega_0 > 0$, es la frecuencia de transición entre sus dos niveles, y σ_z es la matriz de Pauli Z.

Sistemas que pueden describirse de esta forma son aquellos donde las transiciones a otros niveles tienen una probabilidad despreciable. Si además, las excitaciones térmicas no son suficientemente energéticas para llevar al sistema a su primer estado excitado $|+\rangle$, la temperatura efectiva del baño es nula. Esta situación se da, por ejemplo, cuando la frecuencia de transición ω_0 está en un régimen óptico [1–4]. Así, consideramos la siguiente evolución

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \frac{\gamma}{2} ([\sigma, \rho(t)\sigma^\dagger] + [\sigma\rho(t), \sigma^\dagger]), \quad (2.34)$$

donde el primer término corresponde a la evolución unitaria y el segundo corresponde a la parte de desexcitación del primer estado excitado con una tasa de decaimiento γ . Los operadores σ y σ^\dagger corresponden a los operadores de subida y bajada del sistema y están definidos como $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$ y $\sigma^\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$. En la base de autoestados de σ_z pueden escribirse como

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

o sea $\sigma = |-\rangle\langle+|$ y $\sigma^\dagger = |+\rangle\langle-|$.

Las ecuaciones de evolución para los términos de la matriz densidad, desde la Ec.(2.34), están dados por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = -\gamma p(t), \\ \frac{d}{dt}c(t) = -(i\omega_0 + \frac{\gamma}{2})c(t), \\ \frac{d}{dt}c^*(t) = (i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})c^*(t), \\ \frac{d}{dt}q(t) = \gamma q(t), \end{cases} \quad (2.36)$$

donde hemos usado la notación de la Ec.(2.26) para cada elemento de la matriz densidad. La solución analítica de este sistema de ecuaciones viene dada por

$$\begin{cases} p(t) = p(0)e^{-\gamma t}, \\ q(t) = [q(0) + p(0)] - p(0)e^{-\gamma t}, \\ c(t) = c(0) \exp[-(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0)t], \end{cases} \quad (2.37)$$

donde $q(0) + p(0) = 1$.

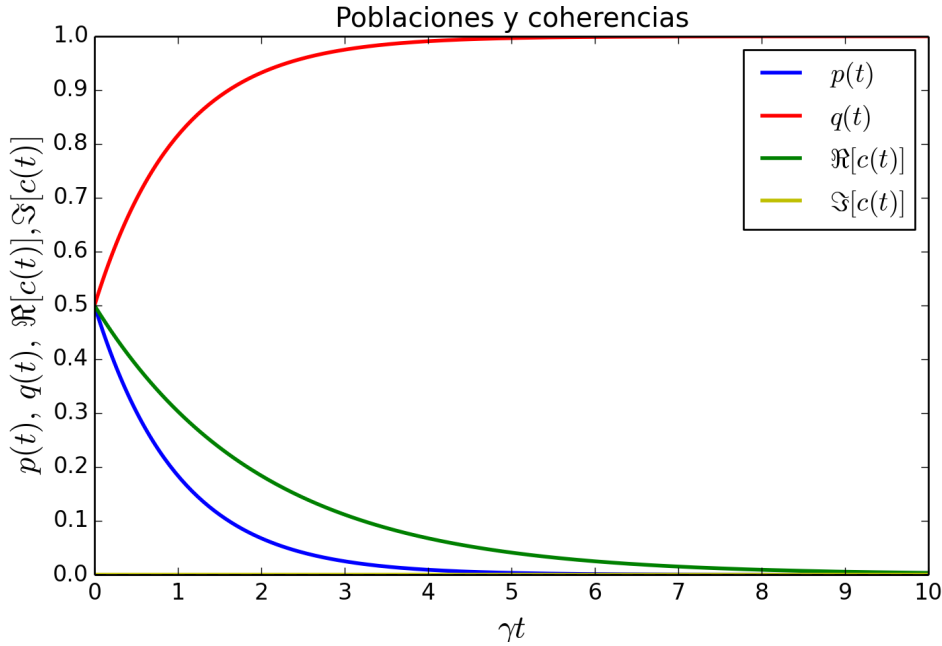


Figura 2.4: Evolución de las poblaciones y coherencias (representación interacción) para un sistema de dos niveles con un Hamiltoniano $H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$, con estado inicial $\rho_0 = (\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}})(\frac{\langle+| + \langle-|}{\sqrt{2}})$, acoplado a un reservorio térmico con temperatura efectiva cero.

Se puede notar del estudio de este sistema, que existe un estado estacionario de la matriz densidad. El mismo corresponde al estado inferior, siendo las coherencias nulas. Esto ocurre sin importar cuál es la condición inicial de la cual partió el sistema.

$$\rho_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = |-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Esta propiedad nos dice también que la temperatura efectiva del baño es nula.

Por otro lado, se puede estudiar la dinámica anterior en una *representación interacción*, esto es,

$$\hat{\rho}(t) \equiv e^{iHt} \rho(t) e^{-iHt}. \quad (2.39)$$

Se tiene que la evolución del sistema [Ec.(2.34)] viene ahora dada por

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{\gamma}{2} ([\sigma, \hat{\rho}(t)\sigma^\dagger] + [\sigma\hat{\rho}(t), \sigma^\dagger]), \quad (2.40)$$

cuyas ecuaciones de evolución vienen dadas idénticamente por las ecuaciones (2.36) pero con $\omega_0 \equiv 0$. Esto hace que en la solución del sistema dadas por las ecuaciones (2.37), las oscilaciones de las coherencias queden ausentes por completo y solo se preserve una evolución exponencial decayente para las mismas como se muestra en la Fig.(2.4). Como la física del sistema no puede cambiar, igualmente se llega a un estado estacionario de equilibrio exactamente igual al anterior [Ec.(2.38)].

Temperatura arbitraria

A diferencia del caso anterior, podríamos estar en presencia de un sistema donde las excitaciones térmicas sean apreciables como para que ocurran transiciones de excitación en el sistema. Este caso puede ocurrir cuando la frecuencia natural del sistema ω_0 está por debajo del régimen óptico [1]. De esta forma, suponiendo que el sistema puede aproximarse por un sistema de dos niveles con Hamiltoniano $H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$, la evolución de su matriz densidad viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \frac{\gamma}{2} ([\sigma, \rho(t)\sigma^\dagger] + [\sigma\rho(t), \sigma^\dagger]) \\ & + \frac{\beta}{2} ([\sigma^\dagger, \rho(t)\sigma] + [\sigma^\dagger\rho(t), \sigma]), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde el primer término del miembro derecho de la ecuación representa, como en el caso anterior, la contribución unitaria a la evolución del sistema. El segundo término representa el decaimiento natural como en el caso de temperatura efectiva cero, y el último término corresponde a las posibles transiciones del sistema al primer estado excitado debido a perturbaciones térmicas apreciables con tasa de excitación β [Fig.(2.5)].

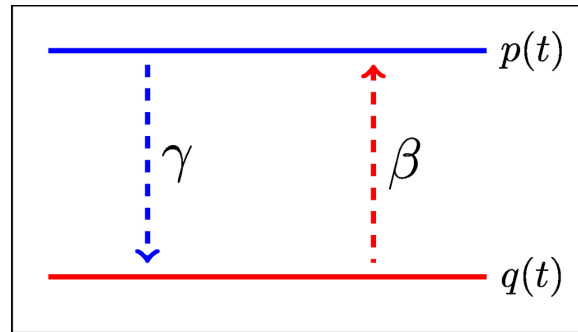


Figura 2.5: Diagrama de las transiciones para un sistema de dos niveles acoplados a un reservorio térmico. Las tasas de decaimiento y de excitación son γ y β , respectivamente.

En la representación interacción, desde la Ec.(2.41), el conjunto de ecuaciones a resolver son

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = -\gamma p(t) + \beta q(t), \\ \frac{d}{dt}c(t) = -\frac{\gamma+\beta}{2}c(t), \\ \frac{d}{dt}c^*(t) = -\frac{\gamma+\beta}{2}c^*(t), \\ \frac{d}{dt}q(t) = \gamma p(t) - \beta q(t). \end{cases} \quad (2.42)$$

Vemos que la evolución de las poblaciones están dadas por ecuaciones maestras clásicas, [Ecs.(2.2a), y (2.2b)]. La solución explícita de estas ecuaciones están dadas por

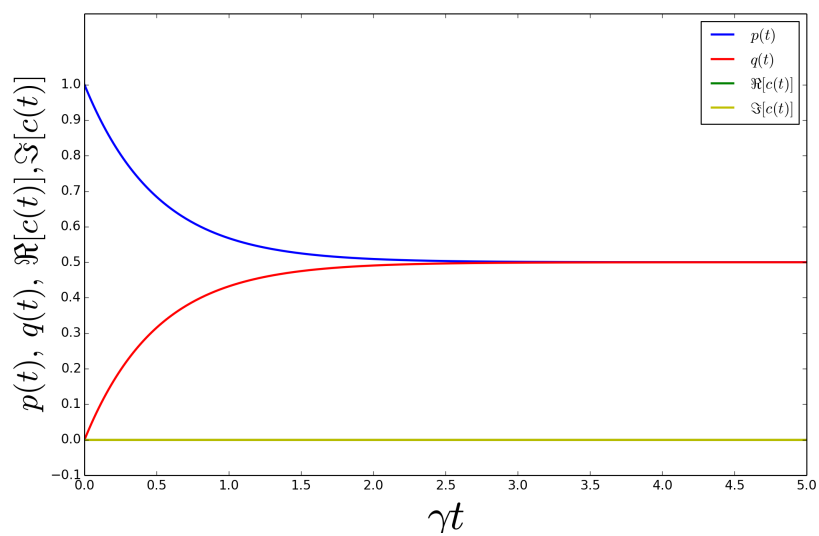
$$\begin{cases} p(t) = \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)(p_0 + q_0) - \left(\frac{\beta q_0 - \gamma p_0}{\gamma+\beta}\right)e^{-(\gamma+\beta)t}, \\ c(t) = c_0 e^{-\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)t}, \\ c^*(t) = c_0^* e^{-\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)t}, \\ q(t) = \left(\frac{\gamma}{\gamma+\beta}\right)(p_0 + q_0) + \left(\frac{\beta q_0 - \gamma p_0}{\gamma+\beta}\right)e^{-(\gamma+\beta)t}, \end{cases} \quad (2.43)$$

donde $(p_0 + q_0) = 1$.

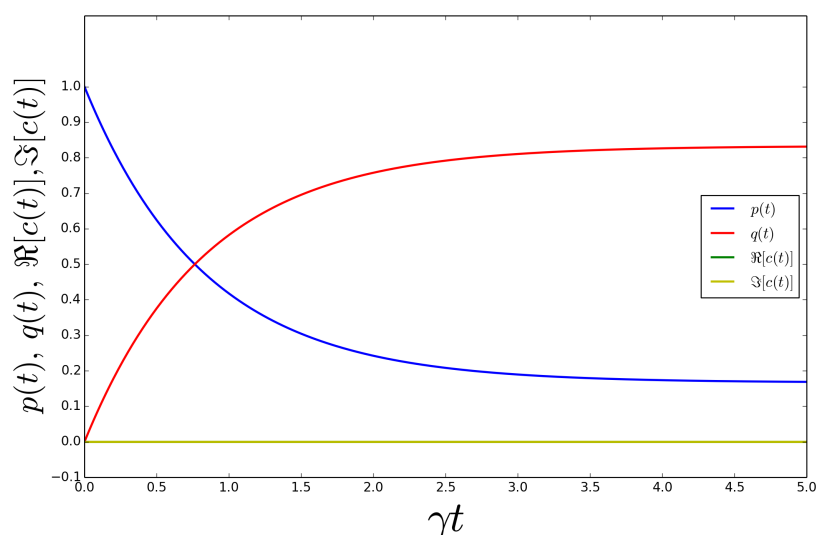
En este caso se observa que la solución estacionaria del sistema es

$$\rho_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} p_\infty & 0 \\ 0 & q_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\gamma+\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma+\beta} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Notar que la propiedad $p_\infty \neq 0$ es debido a las excitaciones térmicas medidas por la tasa β . Observamos, además, que en la representación interacción, las coherencias se mantienen desacopladas y decaen exponencialmente en el tiempo. Como comentario extra, se observa que para altas temperaturas [Fig.(2.6)] el estado estacionario del sistema es aquel de máxima entropía donde están igualmente poblados los dos niveles de energía.



(a)



(b)

Figura 2.6: Poblaciones y coherencias para un sistema de dos niveles en la representación interacción en el régimen de (a) altas temperaturas ($\beta/\gamma = 1$), y (b) en el régimen de bajas temperaturas ($\beta/\gamma = 0.2 \ll 1$).

2.3.3. Fluorescencia

A partir de las ecuaciones tipo Lindblad podemos describir una situación física que será de interés a lo largo de todos los desarrollos posteriores. Consideramos un sistema de dos niveles cuya frecuencia de transición está en el régimen óptico. Por lo tanto, su decaimiento natural puede describirse con un baño a temperatura (efectiva) cero. Además el sistema está sometido a radiación láser [Fig.(2.7)], dando lugar a una [1–4] emisión continua de fotones. La evolución de la matriz densidad puede escribirse como

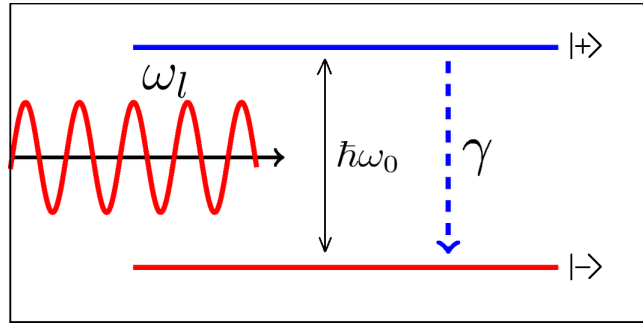


Figura 2.7: Diagrama de un sistema de dos niveles ($|+\rangle, |-\rangle$), con tasa de decaimiento “ γ ” y frecuencia natural ω_0 , el cual es sometido a radiación electromagnética de frecuencia ω_l

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)] + \frac{\gamma}{2} ([\sigma, \rho(t)\sigma^\dagger] + [\sigma\rho(t), \sigma^\dagger]), \quad (2.45)$$

donde γ representa el decaimiento natural del sistema y $\{\sigma^\dagger, \sigma\}$ son los operadores escalera entre los niveles del sistema. El Hamiltoniano tiene la forma

$$H(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma^\dagger e^{-it\omega_l} + \sigma e^{+it\omega_l}), \quad (2.46)$$

donde ω_0 es la frecuencia natural de transición del sistema. Por otro lado, ω_l es la frecuencia del láser que excita el sistema, y la frecuencia Ω mide el acoplamiento dipolo-campo eléctrico entre el sistema y el campo láser externo [1–4].

Escribiendo la evolución en la representación “interacción” ($\rho(t) \rightarrow e^{+i\omega_l\sigma_z}\rho(t)e^{-i\omega_l\sigma_z}$) obtenemos

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i\frac{\delta_l}{2}[\sigma_z, \rho(t)] - i\frac{\hbar\Omega}{2}[\sigma_x, \rho(t)] + \frac{\gamma}{2}([\sigma, \rho(t)\sigma^\dagger] + [\sigma\rho(t), \sigma^\dagger]), \quad (2.47)$$

donde $\delta_l = (\omega_0 - \omega_l)$.

Cuando el láser y el sistema están en resonancia tenemos $\delta_l = 0$. En este caso la

evolución de los elementos de la matriz densidad [en notación de Ec.(2.26)] son

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = -\gamma p(t) + i\frac{\Omega}{2}(c(t) - c^*(t)), \\ \frac{d}{dt}c(t) = -\frac{\gamma}{2}c(t) + i\frac{\Omega}{2}(p(t) - q(t)), \\ \frac{d}{dt}c^*(t) = -\frac{\gamma}{2}c^*(t) - i\frac{\Omega}{2}(p(t) - q(t)), \\ \frac{d}{dt}q(t) = \gamma p(t) - i\frac{\Omega}{2}(c(t) - c^*(t)). \end{cases} \quad (2.48)$$

Notar que en el límite $\Omega = 0$ recuperamos Eq. (2.36) con el reemplazo $\omega_0 \rightarrow 0$ (irreversibilidad), mientras que en el límite $\gamma = 0$ reobtenemos la evolución unitaria dada por Ec.(2.27). La solución explícita de la Ec.(2.48) para la condición inicial $\rho(0) = |-\rangle\langle -|$, está dada por

$$\begin{cases} p(t) = \left(\frac{\Omega^2}{\gamma^2 + 2\Omega^2}\right) \left[1 - e^{-\frac{3\gamma}{4}t} \left(\cosh(\Gamma t) + \frac{3}{4}\left(\frac{\gamma}{\Gamma}\right) \sinh(\Gamma t)\right)\right], \\ c(t) = -\left(\frac{i\gamma\Omega}{\gamma^2 + 2\Omega^2}\right) \left[1 - e^{-\frac{3}{4}\gamma t} \left(\cosh(\Gamma t) + \left(\frac{4\Gamma^2 + 3\Omega^2}{\Gamma\gamma}\right) \sinh(\Gamma t)\right)\right], \end{cases} \quad (2.49)$$

donde

$$\Gamma \equiv \sqrt{\left(\frac{\gamma}{4}\right)^2 - \Omega^2}. \quad (2.50)$$

El sistema siempre alcanza un estado estacionario siendo definido por

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \left(\frac{\Omega^2}{\gamma^2 + 2\Omega^2}\right), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = -\left(\frac{i\gamma\Omega}{\gamma^2 + 2\Omega^2}\right), \end{cases}, \quad (2.51)$$

dando lugar a

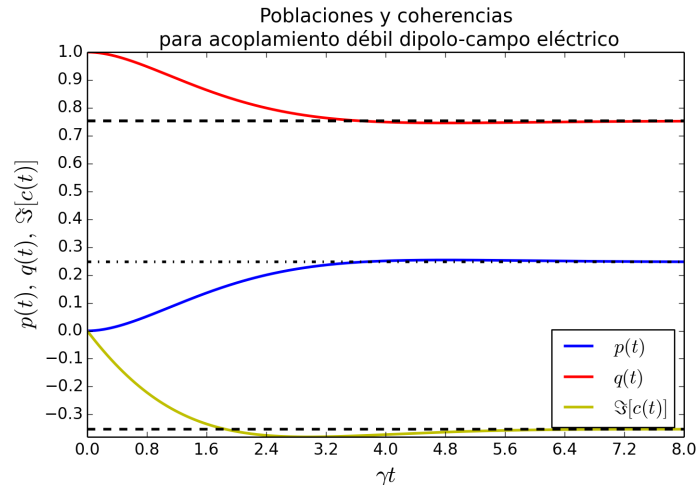
$$\rho_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega^2}{\gamma^2 + 2\Omega^2} & -\frac{i\gamma\Omega}{\gamma^2 + 2\Omega^2} \\ \frac{i\gamma\Omega}{\gamma^2 + 2\Omega^2} & 1 - \frac{\Omega^2}{\gamma^2 + 2\Omega^2} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

En la Fig.(2.8) mostramos los comportamientos característicos de la matriz densidad del sistema en los casos de un acoplamiento débil ($\Omega/\gamma \ll 1$) y fuerte ($\Omega/\gamma \gg 1$) con el campo láser externo. En ambos casos la solución estacionaria está descripta por la ecuación anterior, donde, particularmente para nuestros parámetros elegidos es

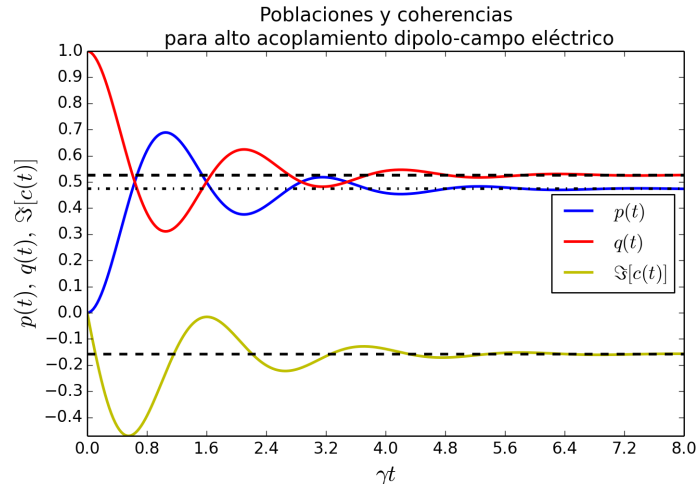
$$\rho_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} 0.247 & -i0.353 \\ i0.353 & 0.752 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

para la Fig.(2.8) (a), y

$$\rho_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} 0.473 & -i1.57 \\ i1.57 & 0.526 \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$



(a)



(b)

Figura 2.8: Evolución de las poblaciones y coherencias de la matriz densidad de un sistema fluorescente bajo la representación interacción [Ec.(2.48)]. La condición inicial es $\rho(0) = |-\rangle\langle -|$ ($p(0) = c(0) = 0$, $q(0) = 1$). Los parámetros son (a) $\Omega/\gamma = 0.7$ y (b) $\Omega/\gamma = 3$, respectivamente

para la Fig.(2.8) (b). En este caso, de acoplamiento fuerte, la evolución de ρ desarrolla oscilaciones medidas por la Ec.(2.50).

2.4. Fluorescencia en reservorios con fluctuaciones clásicas

En secciones anteriores presentamos estudios de sistemas cuánticos abiertos donde el medio ambiente se mantenía fijo (tanto a temperatura efectiva cero como temperatura arbitraria). En esta sección, presentaremos la evolución del sistema cuántico (fluorescente) considerando esta vez fluctuaciones que afectan el acoplamiento efectivo entre el sistema y reservorio donde éste se encuentra inmerso. Como un primer ejemplo, veremos el caso en donde dichas fluctuaciones medioambientales son independientes de la evolución del sistema (aunque afecten al mismo) y seguidamente presentaremos el caso donde tanto las fluctuaciones medioambientales como la evolución del sistema se encuentran correlacionadas [17].

Consideraremos que el reservorio puede encontrarse en distintos estados configuracionales $\{R\}_{R=1}^{R_{\max}}$. Cada uno de ellos está asociado a una diferente configuración mesoscópica del baño. El estado del sistema, bajo la condición de que el baño está en el estado R , es denotada como $\rho_R(t)$.

La matriz densidad del sistema tendrá, en general, una evolución no-Markoviana, es decir, la dinámica no sigue una evolución local en el tiempo. Equivalentemente, el sistema a tiempo t dependerá de toda la historia del proceso [1]; por esta propiedad se dice que se presentan efectos de memoria. Esto ocurre cuando hay más de un estado configuracional del baño. Para diferenciar estas matrices densidad de aquellas cuya evolución sí sea Markoviana, se escribirá bajo la notación $\rho = \rho_t$. Entonces, la matriz densidad ρ_t del sistema está dada por [17, 18]

$$\rho_t = \sum_{R=1}^{R_{\max}} \rho_R(t). \quad (2.55)$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$\rho_t = \sum_{R=1}^{R_{\max}} P_R(t) \frac{\rho_R(t)}{\text{Tr}_S [\rho_R(t)]}, \quad P_R(t) \equiv \text{Tr}_S [\rho_R(t)], \quad (2.56)$$

donde $\text{Tr}_S[\bullet]$ es la traza parcial sobre el sistema S . De esta forma, $P_R(t)$ es la probabilidad que el baño esté en el estado configuracional R , y $\rho_R(t)/\text{Tr}_S [\rho_R(t)]$ es el correspondiente estado condicionado del sistema (normalizado).

Para la dinámica de los estados auxiliares $\{\rho_R(t)\}$, de manera general, supondremos

que están dadas por una ecuación de tipo Lindblad generalizada [18]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_R(t)}{dt} = & -\frac{i}{\hbar} [H_R(t), \rho_R(t)] - \gamma_R \left(\left\{ D, \rho_R(t) \right\}_+ - J[\rho_R(t)] \right) \\ & - \sum_{R' \neq R} \gamma_{R'R} \left\{ \frac{A^\dagger A}{2}, \rho_R(t) \right\}_+ + \sum_{R' \neq R} \gamma_{RR'} \left(A \rho_{R'}(t) A^\dagger \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde $D = \sigma^\dagger \sigma / 2$ y $J[\bullet] = \sigma \bullet \sigma^\dagger$, y “ A ” representa un operador arbitrario que actúa sobre el espacio de Hilbert de nuestro sistema cuántico. Aquí, γ_R representa el decaimiento natural del sistema *dado que* el baño está en el estado configuracional R . De la misma forma, $H_R(t)$ es el Hamiltoniano del sistema bajo la misma condición.

Consecuentemente, tomando la operación de traza sobre la ecuación (2.57), vemos que la dinámica para los estados configuracionales del baño está dada por

$$\frac{dP_R(t)}{dt} = - \sum_{R' \neq R} \gamma_{R'R} \text{Tr} \left(A^\dagger A \rho_R(t) \right) + \sum_{R' \neq R} \gamma_{RR'} \text{Tr} \left(A^\dagger A \rho_{R'}(t) \right). \quad (2.58)$$

Vemos que, en general, la probabilidad $P_R(t)$ de que el baño se encuentre en un dado estado configuracional, está acoplado con los estados condicionados $\{\rho_R(t)\}$ del sistema cuántico.

Consideraremos un sistema fluorescente de dos niveles bajo radiación láser. Entonces [17],

$$H_R(t) = \frac{\hbar\omega_R}{2} \sigma_z + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \left(\sigma^\dagger e^{-i\omega_L t} + \sigma e^{+i\omega_L t} \right), \quad (2.59)$$

donde $\omega_R = \omega_0 + \delta\omega_R$. Esta expresión general nos dice que la frecuencia natural del sistema ω_R y el acoplamiento con el láser, dado por Ω_R , dependen del estado del baño. En los siguientes análisis, consideramos

$$\omega_R = \omega_0, \quad \Omega_R = \Omega. \quad (2.60)$$

Finalmente, en la Ec.(2.57), las constantes $\{\gamma_{RR'}\}$ dan la tasa de transición entre los estados del baño. De hecho, la estructura de la última línea en la Ec.(2.57) se asemeja a una ecuación maestra clásica descrita al inicio del capítulo [Ec.(2.1)]. La diferencia está en el carácter matricial de la ecuación, la cual está determinada por el operador “ A ”, donde el mismo actúa en el espacio de Hilbert del sistema.

En el caso en que “ A ” corresponde al operador identidad ($A = I$), las transiciones entre los estados configuracionales del baño se hacen independientes del estado del sistema y, como consecuencia, las probabilidades $P_R(t)$ del estado configuracional del baño siguen la dinámica de las ecuaciones maestras clásicas (2.1). En caso contrario,

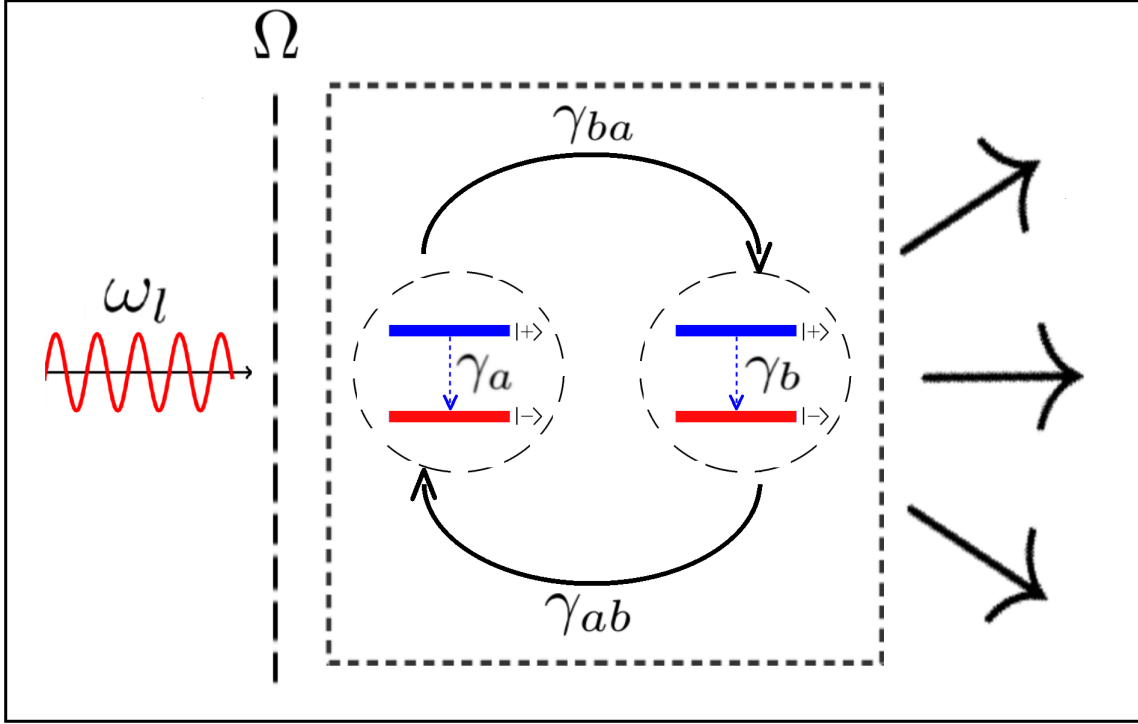


Figura 2.9: Esquema de un sistema fluorescente de dos niveles en presencia de un baño auto-fluctuante, (Ec.2.61), dotado con dos estados configuracionales a, b . El estado superior e inferior del sistema están denotados con $|+\rangle$ y $|-\rangle$ respectivamente. Los parámetros γ_a y γ_b son las tasas de decaimiento natural del sistema correspondiente a cada estado configuracional. γ_{ab} y γ_{ba} son las tasas de transición entre los estados del baño. ω_l es la frecuencia del láser externo y Ω mide el acoplamiento unitario del mismo con el sistema. Las flechas exteriores simbolizan los fotones radiados por el sistema.

si $A \neq I$, las fluctuaciones configuracionales están correlacionadas con el estado del sistema [17, 18]. Estos casos se analizan a continuación.

2.4.1. Fluctuaciones independientes

En esta sección estudiaremos el caso de medioambientes auto-fluctuantes, esto es, aquellos donde las transiciones entre estados configuracionales no dependen de la evolución del sistema de interés [17, 18]. El esquema correspondiente puede verse en la Fig.(2.9).

La ecuación de evolución para los estados $\{\rho_R(t)\}$ corresponde a la Ec.(2.57) con $A = I$. Escribiendo dicha evolución en una representación interacción obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_R(t)}{dt} = & -\frac{i\Omega}{2}[\sigma_x, \rho_R(t)] - \frac{\gamma_R}{2}\{\sigma^\dagger\sigma, \rho_R(t)\} + \gamma_R\sigma\rho_R(t)\sigma^\dagger \\ & + \sum_{R'}\gamma_{RR'}\rho_{R'}(t) - \sum_{R'}\gamma_{R'R}\rho_R(t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde hemos supuesto que el sistema y el láser externo están en resonancia, $\omega_l = \omega_0$

en Eq. (2.59).

Desde la ecuación anterior, la dinámica de las probabilidades configuracionales del baño ($P_R(t) = \text{Tr}[\rho_R(t)]$), está dada por:

$$\frac{dP_R(t)}{dt} = - \sum_{R'} \gamma_{R'R} P_R(t) + \sum_{R'} \gamma_{RR'} P_{R'}(t), \quad (2.62)$$

que corresponde a una ecuación maestra clásica. De esta forma las dos ecuaciones anteriores *describen un sistema fluorescente donde el decaimiento natural fluctúa entre un set de valores* $\{\gamma_R\}$. Las transiciones entre dichos valores obedecen la ecuación maestra clásica (2.62). Notar que en la derivación de esta ecuación usamos que la traza de la primera línea del miembro derecho de la ecuación (2.61) se anula idénticamente. De hecho, este término se trata de una contribución tipo Lindblad, la cual conserva traza.

Por simplicidad, solo estudiaremos el caso donde el baño puede estar en dos estados distintos $\{R\} = \{a, b\}$. Entonces, de manera explícita, desde la Ec.(2.61), el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_a(t) &= - \left(\gamma_a + \gamma_{ba} \right) p_a(t) + \gamma_{ab} p_b(t) + i \frac{\Omega}{2} \left(c_a(t) - c_a^*(t) \right), \\ \frac{d}{dt} c_a(t) &= - \left(\frac{\gamma_a}{2} + \gamma_{ba} \right) c_a(t) + \gamma_{ab} c_b(t) + i \frac{\Omega}{2} \left(p_a(t) - q_a(t) \right), \\ \frac{d}{dt} c_a^*(t) &= - \left(\frac{\gamma_a}{2} + \gamma_{ba} \right) c_a^*(t) + \gamma_{ab} c_b^*(t) - i \frac{\Omega}{2} \left(p_a(t) - q_a(t) \right), \\ \frac{d}{dt} q_a(t) &= - \gamma_{ba} q_a(t) + \gamma_a p_a(t) + \gamma_{ab} q_b(t) - i \frac{\Omega}{2} \left(c_a(t) - c_a^*(t) \right), \end{aligned} \quad (2.63a)$$

lo cual corresponde a cuando el baño está en el estado a , y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_b(t) &= - \left(\gamma_b + \gamma_{ab} \right) p_b(t) + \gamma_{ba} p_a(t) + i \frac{\Omega}{2} \left(c_b(t) - c_b^*(t) \right), \\ \frac{d}{dt} c_b(t) &= - \left(\frac{\gamma_b}{2} + \gamma_{ab} \right) c_b(t) + \gamma_{ba} c_a(t) + i \frac{\Omega}{2} \left(p_b(t) - q_b(t) \right), \\ \frac{d}{dt} c_b^*(t) &= - \left(\frac{\gamma_b}{2} + \gamma_{ab} \right) c_b^*(t) + \gamma_{ba} c_a^*(t) - i \frac{\Omega}{2} \left(p_b(t) - q_b(t) \right), \\ \frac{d}{dt} q_b(t) &= - \gamma_{ab} q_b(t) + \gamma_b p_b(t) + \gamma_{ba} q_a(t) - i \frac{\Omega}{2} \left(c_b(t) - c_b^*(t) \right), \end{aligned} \quad (2.63b)$$

cuando el baño esta en el estado b . La notación para los elementos de la matriz densidad es similar a la introducida anteriormente [Ec.(2.26)], donde además el subíndice denota el estado del baño.

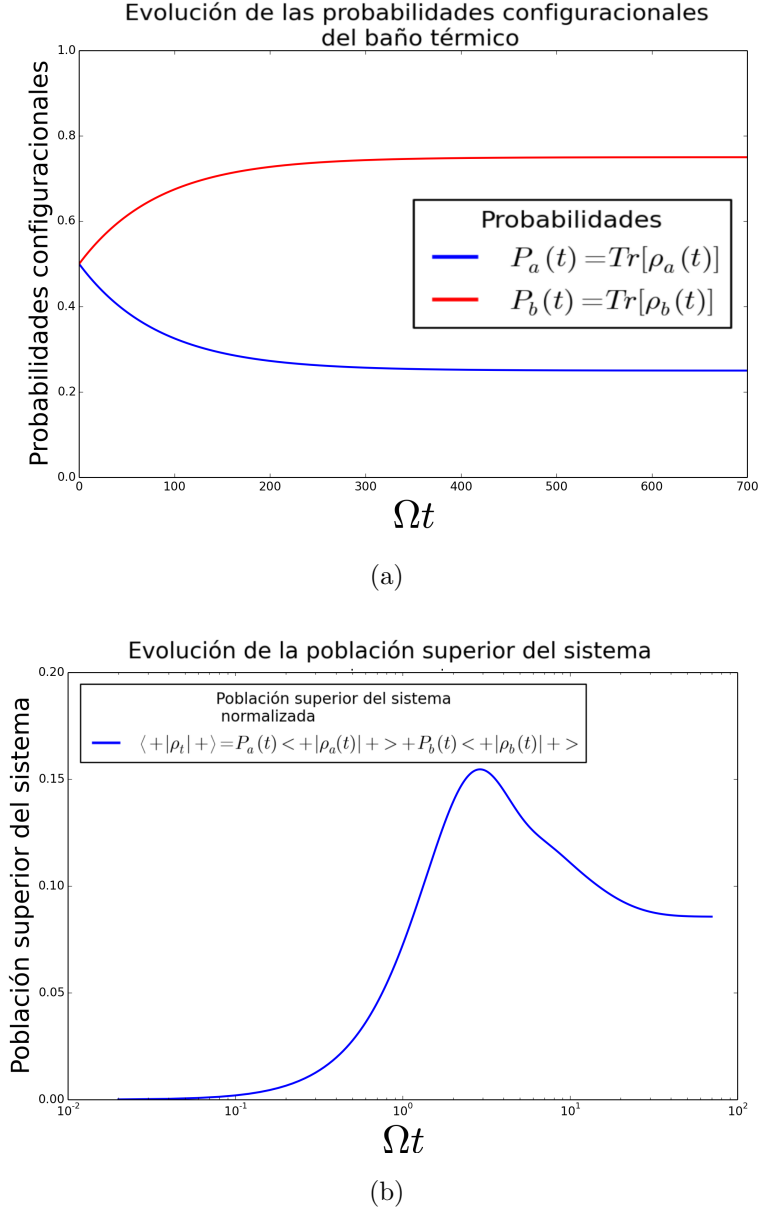


Figura 2.10: Evolución, en la representación interacción, (a) de la probabilidad configuracional del baño, y (b) evolución de la población superior del sistema para el caso de reservorios autofluctuantes para un sistema fluorescente de dos niveles. Los parámetros son $\gamma_a/\Omega = 1$, $\gamma_b/\Omega = 10$, y $\gamma_{ab}/\Omega = 0.003$, $\gamma_{ba}/\Omega = 0.009$. La condición inicial es $\rho_a(0) = \rho_b(0) = 0.5 |-\rangle\langle -|$

Como puede notarse en la Fig.(2.10)(a), la probabilidad configuracional del estado “ R ” del baño, en este caso de sistemas autofluctuantes, sigue la dinámica de una ecuación maestra clásica al igual que la figura (2.2), lo que significa que la dinámica del baño evoluciona de manera independiente a la evolución del sistema cuántico. Por otro lado, el sistema también alcanza un estado estacionario [Fig.(2.10)(b)].

2.4.2. Fluctuaciones correlacionadas

La dinámica general de las ecuaciones de tipo Lindblad (2.57) permite, además, un estudio diferente al caso estudiado en la sección anterior, donde $A = 1$. En esta sección estudiaremos el caso donde las fluctuaciones medioambientales dependen del estado del sistema. La motivación está dada por sistemas fluorescentes intermitentes donde la duración de los distintos estados de emisión depende de la intensidad del láser externo aplicado [17]. Tomando $A = \sigma$, la evolución de los estados auxiliares, en la representación interacción, está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_R(t)}{dt} = & -\frac{i}{\hbar} [H_R, \rho_R(t)] - \gamma_R \left(\left\{ D, \rho_R(t) \right\}_+ - J[\rho_R(t)] \right) \\ & - \sum_{R'} \gamma_{RR'} \left\{ D, \rho_R(t) \right\}_+ + \sum_{R'} \gamma_{RR'} J[\rho_{R'}(t)], \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde $D = \sigma^\dagger \sigma / 2$, y $J[\bullet] = \sigma \bullet \sigma^\dagger$, fueron definidos anteriormente.

A diferencia de la evolución dada en la sección anterior, las probabilidades configuracionales del baño $\{P_R(t)\}$ no obedecen una ecuación maestra clásica. De hecho, en este caso vienen descritas por ($P_R(t) = \text{Tr}[\rho_R(t)]$)

$$\frac{dP_R(t)}{dt} = - \sum_{R'} \gamma_{R'R} \langle + | \rho_{R'}(t) | + \rangle + \sum_{R'} \gamma_{RR'} \langle + | \rho_R(t) | + \rangle, \quad (2.65)$$

donde observamos que las mismas dependen fuertemente del estado del sistema fluorescente. Más aún, debido a la forma de la ecuación (2.64), y su dependencia con el operador J en la segunda línea, las transiciones entre estados configuracionales solo pueden ser posibles cuando se es detectado un fotón [17]. Explícitamente, el sistema de ecuaciones a resolver viene dado por (baño en estado a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_a(t) &= -(\gamma_a + \gamma_{ba}) p_a(t) - \frac{i\Omega}{2} (c_a^*(t) - c_a(t)), \\ \frac{d}{dt} c_a(t) &= -\left(\frac{\gamma_a + \gamma_{ba}}{2}\right) c_a(t) + \frac{i\Omega}{2} (p_a(t) - q_a(t)), \\ \frac{d}{dt} c_a^*(t) &= -\left(\frac{\gamma_a + \gamma_{ba}}{2}\right) c_a^*(t) - \frac{i\Omega}{2} (p_a(t) - q_a(t)), \\ \frac{d}{dt} q_a(t) &= -\frac{i\Omega}{2} (c_a(t) - c_a^*(t)) + \gamma_a p_a(t) + \gamma_{ab} p_b(t), \end{aligned} \quad (2.66a)$$

y por (baño en estado b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_b(t) &= -(\gamma_b + \gamma_{ab}) p_b(t) - \frac{i\Omega}{2} (c_b^*(t) - c_b(t)), \\ \frac{d}{dt} c_b(t) &= -\left(\frac{\gamma_b + \gamma_{ab}}{2}\right) c_b(t) + \frac{i\Omega}{2} (p_b(t) - q_b(t)), \\ \frac{d}{dt} c_b^*(t) &= -\left(\frac{\gamma_b + \gamma_{ab}}{2}\right) c_b^*(t) - \frac{i\Omega}{2} (p_b(t) - q_b(t)), \\ \frac{d}{dt} q_b(t) &= -\frac{i\Omega}{2} (c_b(t) - c_b^*(t)) + \gamma_b p_b(t) + \gamma_{ba} p_a(t). \end{aligned} \quad (2.66b)$$

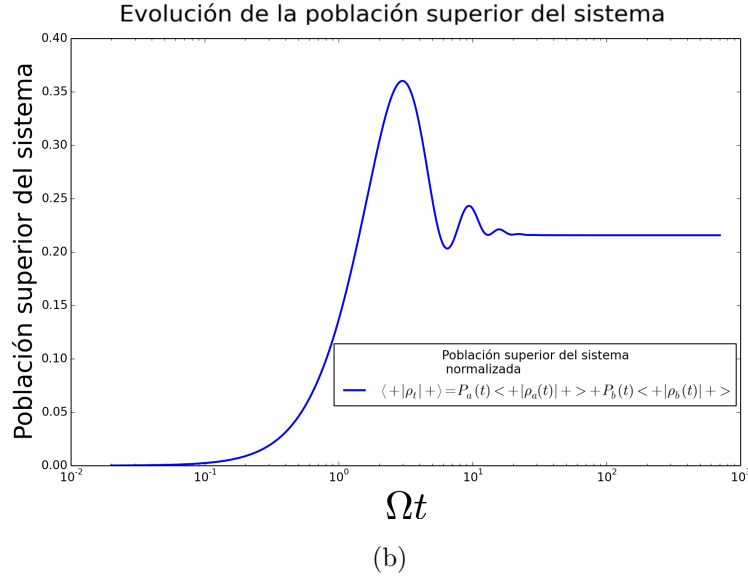
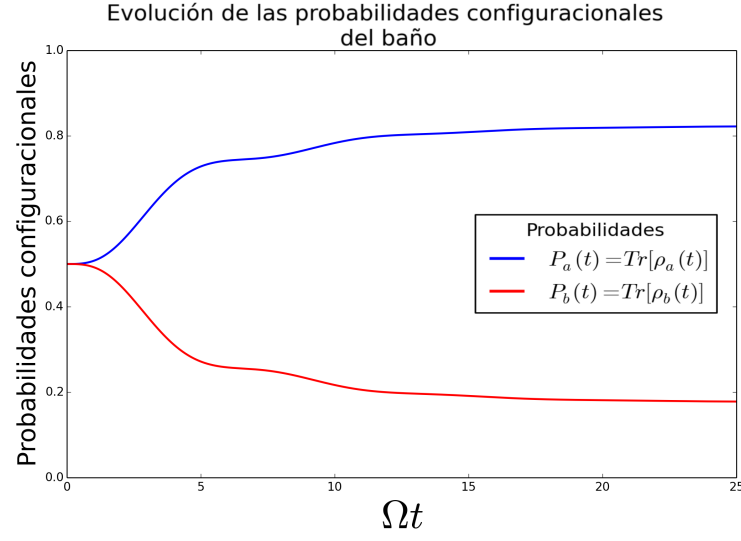


Figura 2.11: Evolución, en la representación interacción, (a) de la probabilidad configuracional del baño, y (b) evolución de la población superior del sistema, para el caso de medio-ambientes asistidos por luz [Ecs.(2.66a) y (2.66b)]. Los parámetros son $\{\gamma_a/\Omega = 1.8, \gamma_b/\Omega = 0.15\}$ y de transición entre configuraciones del baño $\{\gamma_{ab}/\Omega = 0.35, \gamma_{ba}/\Omega = 0.2\}$, con condición inicial $\rho_a(0) = \rho_b(0) = 0.5 |-\rangle\langle-|$.

Como puede notarse a partir de la figura (2.11), la evolución de las poblaciones del baño efectivamente muestran la presencia de un fuerte acoplamiento o dependencia entre la dinámica del baño y el sistema. Esto se evidencia en el alejamiento del comportamiento exponencial típico de las soluciones de una ecuación maestra clásica. Este último caso corresponde al caso anterior (baño autofluctuante) mostrado en la Fig. (2.10). Debido a la similitud de los parámetros usados en esta tesis y los publicados en la referencia [22], las dependencias temporales son parecidas.

2.5. Memoria temporal

Concretando lo dicho brevemente en secciones anteriores, en el caso en que el sistema está acoplado a un baño caracterizado por distintos estados, la evolución del mismo sigue de una adición sobre estados auxiliares $\{\rho_R(t)\}$, Eq. (2.55). Es de notar entonces, que la evolución del sistema, $\rho_t = \sum_{R=1}^{R_{\max}} \rho_R(t)$, no sigue en general una evolución local en el tiempo o Markoviana. De hecho, el eliminar grados de libertad del baño [estados configuracionales] introduce efectos de memoria. Se puede ver que en general dicha evolución puede escribirse como [17]

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \int_0^t dt' \mathbb{L}(t-t')\rho_{t'}, \quad (2.67)$$

donde $\mathbb{L}(t-t')$ es un superoperador tipo Lindblad donde la matriz característica que lo define depende del tiempo. Solo cuando $\mathbb{L}(t-t') \rightarrow \delta(t-t')\mathbb{L}$ recuperamos una evolución Markoviana para el sistema, es decir, la evolución es local en el tiempo y definida por una ecuación de Lindblad. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando el tiempo característico para las fluctuaciones de los estados del baño ocurren en una escala de tiempo mucho menor que el tiempo característico de la dinámica del sistema.

Capítulo 3

Método de saltos cuánticos

3.1. Proceso de medición en sistemas cuánticos

Si bien es cierto que los sistemas cuánticos cerrados evolucionan de forma unitaria, el proceso de medición debe describirse en forma alternativa. La descripción de un proceso de medición y sus efectos sobre el estado del sistema siguen del siguiente postulado [21].

Postulado general para mediciones en sistemas cuánticos: Las mediciones cuánticas están descritas por una colección $\{M_m\}$ de *operadores de medidas*. Estos operadores actúan en el espacio de estados del sistema que será medido, donde el índice m se refiere a los resultados de las mediciones que ocurrirán en el experimento. Si el estado del sistema cuántico inmediatamente antes de realizar la medición es $|\psi\rangle$, la probabilidad de que el resultado sea m está dado por:

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (3.1)$$

El estado luego de la medición, habiéndose obtenido como resultado m , es:

$$|\psi^m\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (3.2)$$

Los operadores de medición satisfacen la *ecuación de completitud*

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (3.3)$$

Esta ecuación de completitud, implica que la distribución de probabilidad esta normalizada:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = |\psi|^2. \quad (3.4)$$

Ejemplos de este conjunto de operadores de medidas sobre estados del sistema,

pueden ser $\{M_m\} = \{|1\rangle\langle 1|, |0\rangle\langle 0|\}$, para mediciones de espín de un electrón, o $\{M_m\} = \{\sigma, |-\rangle\langle -|\} \equiv \{|-\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$, para medir la ocurrencia de transiciones entre estados de un sistema de dos niveles (éste, particularmente, será similar a uno de los conjuntos de medidas en que estaremos interesados más adelante).

3.1.1. Medidas proyectivas

Las medidas proyectivas se tratan de un caso especial de las medidas generales definidas en la sección anterior. Las mismas están descritas en base a un observable M con descomposición espectral

$$M = \sum_m m P_m, \quad (3.5)$$

donde P_m es el proyector ($P_m^2 = P_m$) sobre el autoespacio de M con autovalor m correspondiente. Luego de la medición del estado inicial $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado m , y el estado posterior a la medición, está dada respectivamente por

$$\begin{cases} p(m) &= \langle \psi | P_m | \psi \rangle \\ |\psi^m\rangle &= \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Las medidas proyectivas son un caso especial de las medidas generales, expresadas en el postulado anterior. De hecho, si le pedimos a los operadores de medida $\{M_m\}$ que sean proyectores ortogonales, es decir, hermíticos y que $M_m M_{m'} = \delta_{mm'} M_m$, recuperamos las expresiones que se acaban de postular para las medidas proyectivas (3.6). En particular, se puede ver trivialmente que los operadores de medida del espín citados anteriormente son un ejemplo de este tipo de medidas.

Los operadores de medidas proyectivas cumplen, además, la propiedad conocida como *repetibilidad*, en el sentido de que luego de una medida P_m sobre un estado $|\psi\rangle$, al aplicar repetidamente dicha medición obtendremos el mismo estado $|\psi^m\rangle$ y con probabilidad $p(m) = 1$ de obtener el resultado m , sin cambiar dicho estado.

Sin embargo en distintas situaciones experimentales, repetir una medida más de una vez a veces resulta imposible (por ejemplo, la detección de la llegada de un fotón a una pantalla destruye el fotón en el proceso); para casos como éstos, el postulado de la medida en su forma general (3.1-3.3) resulta ser el apropiado y el que debe ser empleado. Es de destacar que la definición de medición general introducida anteriormente puede reobtenerse en base a mediciones proyectivas realizadas sobre sistemas bipartitos [21].

3.1.2. Mediciones cuánticas en el contexto de matrices densidad

En esta sección, veremos cómo será reformulado el postulado general de la mediciones cuánticas en el lenguaje de matrices densidad.

Dado un conjunto de operadores de medida $\{M_m\}$, sabiendo que el estado inicial del sistema es $|\alpha\rangle$, la probabilidad condicional de obtener un resultado m es:

$$p(m|\alpha) = \langle \alpha | M_m^\dagger M_m | \alpha \rangle = \text{Tr} (M_m^\dagger M_m | \alpha \rangle \langle \alpha |). \quad (3.7)$$

Dado un ensamble de estados $|\alpha\rangle$ con pesos estadísticos W_α ,

$$\rho = \sum_{\alpha} W_{\alpha} | \alpha \rangle \langle \alpha |, \quad (3.8)$$

la probabilidad de obtener el resultado m está dada por

$$p(m) = \sum_{\alpha} W_{\alpha} p(m|\alpha) \quad (3.9)$$

$$= \sum_{\alpha} W_{\alpha} \text{Tr} (M_m^\dagger M_m | \alpha \rangle \langle \alpha |) \quad (3.10)$$

$$= \text{Tr} (M_m^\dagger M_m \rho). \quad (3.11)$$

Similarmente, sabiendo que el estado del sistema es $|\alpha\rangle$, luego de obtener el resultado m , estará dado por

$$|\alpha^m\rangle = \frac{M_m |\alpha\rangle}{\sqrt{\langle \alpha | M_m^\dagger M_m | \alpha \rangle}}. \quad (3.12)$$

Así resulta que la matriz densidad correspondiente al ensamble de estados $\{|\alpha^m\rangle, p(\alpha|m)\}$, luego de realizar la medición M_m será:

$$\begin{aligned} \rho^m &= \sum_{\alpha} p(\alpha|m) |\alpha^m\rangle \langle \alpha^m| = \sum_{\alpha} p(\alpha|m) \frac{M_m |\alpha\rangle \langle \alpha| M_m^\dagger}{\langle \alpha | M_m^\dagger M_m | \alpha \rangle} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{p(m|\alpha)p(\alpha)}{p(m)} \frac{M_m |\alpha\rangle \langle \alpha| M_m^\dagger}{p(m|\alpha)} \\ &= \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr} (M_m^\dagger M_m \rho)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si bien es cierto que solo hemos mencionado cómo se reformula el postulado de las mediciones cuánticas en el contexto de las matrices densidad, esta reformulación

se puede extender de manera análoga al resto de los otros postulados y tener todo un formalismo de la mecánica cuántica pero en el contexto de matrices densidad y operadores generales de medida.

3.2. Teoría general de saltos cuánticos

En su formulación original, el método de saltos cuánticos [1–4] permite asignar una matriz densidad a un sistema continuamente monitoreado en el tiempo. Esto es, el estado del sistema está condicionado a la trayectoria definida por los resultados del aparato de medida. Dada la aleatoriedad del proceso de medición, dicho estado (función de onda o matriz densidad) evoluciona en forma estocástica a lo largo del tiempo. En lo siguiente estudiaremos dicho formalismo para evoluciones acopladas a reservorios caracterizados por fluctuaciones clásicas.

3.2.1. Dinámica de Lindblad en la representación vectorial

En secciones anteriores, debido a que en general tenemos nuestro sistema cuántico acoplado a un reservorio o baño clásico con más de un estado configuracional (en cuyo caso, la dinámica de los estados auxiliares $\{\rho_R(t)\}$ está dada por una ecuación tipo Lindblad generalizada (2.57)), será entonces conveniente introducir una notación vectorial para el estado híbrido “Sistema -Configuraciones del baño”. La notación vectorial es conveniente ya que la misma captura la naturaleza local en el tiempo o Markoviana de los estados auxiliares a pesar de que el propio sistema cuántico presenta una dinámica no-Markoviana (2.67).

Como el conjunto de todos los estados configuracionales del baño están etiquetados por el índice R , se define entonces una base vectorial (real) $\{|R\rangle\}$ que debe ser completa y ortonormal, es decir $\sum_{R=1}^{R=R_{\max}} |R\rangle\langle R| = 1$, y $\langle R|R'\rangle = \delta_{RR'}$. Notar que por conveniencia en términos de notación, se usan brackets curvos para los arreglos en componentes sobre esta base vectorial. La misma indexa los estados configuracionales del baño y, considerando, además, que como se trata de un baño clásico, no usamos los kets usuales de la notación de Dirac.

Bajo la definición de esta base para los estados configuracionales, tenemos que a partir de la ecuación (2.55), el estado del sistema cuántico se reescribe como

$$\begin{aligned}
\rho_t &= \sum_R \rho_R(t) = \sum_{RR'} \delta_{RR'} \rho_{R'}(t) = \sum_R \sum_{R'} (R|R') \rho_{R'}(t) \\
&= \sum_R (R | \sum_{R'} \rho_{R'}(t) | R') = (1|\rho_t),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde se han definido las cantidades

$$\begin{cases} (1| \equiv \sum_R (R|, \\ | \rho_t) \equiv \sum_R \rho_R(t) | R). \end{cases} \tag{3.15}$$

El vector $| \rho_t)$ en la ecuación (3.15), se define como el estado vectorial cuántico (híbrido) “Sistema condicionado-baño”, o simplemente **estado vectorial cuántico**.

A partir de la normalización del estado ρ_t , se tiene que

$$1 \equiv \text{Tr}[\rho_t] = \text{Tr}[(1|\rho_t)], \tag{3.16}$$

de modo que los estados vectoriales cuánticos, deben estar normalizados bajo la operación $\text{Tr}[(1|\bullet)] \equiv 1$.

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
1 &= \text{Tr}[(1|\rho_t)] = \sum_{RR'} (R|R') \text{Tr}[\rho_{R'}(t)] = (1| \sum_{R'} \text{Tr}[\rho_{R'}(t)] | R') \\
&= (1|P_t),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde la cantidad

$$\begin{aligned}
| P_t) &\equiv \sum_R P_R(t) | R) \\
&= \sum_R \text{Tr}[\rho_R(t)] | R).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

se define como el estado vectorial clásico asociado a las configuraciones del baño o simplemente **estado vectorial clásico**. Esta cantidad, consistentemente con la ecuación (3.17), está normalizada de acuerdo a la operación $(1| \bullet) \equiv 1$, y la misma representa la normalización del conjunto de probabilidades clásicas de los estados configuracionales del baño.

A partir de esta notación vectorial, sabiendo que los estados auxiliares siguen una ecuación tipo Lindblad generalizada (2.57), la dinámica para el estado vectorial cuánti-

co vendrá dada por

$$\frac{d}{dt} |\rho_t\rangle = \mathcal{L} |\rho_t\rangle, \quad (3.19)$$

con condición inicial separable $|\rho_0\rangle = \rho_0 |P_0\rangle$, esto es, no existe ninguna correlación entre el sistema y los estados configuracionales del baño.

El objeto \mathcal{L} representa una matriz de superoperadores de Lindblad generalizados que llamaremos el **operador matricial de Lindblad**, con componentes matriciales $(\mathcal{L})_{RR'} = (R | \mathcal{L} | R')$ y que caracteriza la dinámica de nuestro estado vectorial cuántico.

A partir de la dinámica local en el tiempo o Markoviana que siguen los estados vectoriales cuánticos (3.19), podemos obtener tanto la dinámica de los estados vectoriales clásicos $|P_t\rangle$ mediante la operación $\text{Tr}[\bullet]$, como la dinámica (también Markoviana) de los estados condicionados $\rho_R(t)$ operando con $(R | [\bullet]$, así como también obtener la dinámica (con efectos de memoria o no-Markoviana) del estado cuántico del sistema ρ_t aplicando la operación $(1 | [\bullet]$.

Como comentario final, en el caso que exista un solo estado configuracional del baño ($R_{\max} \equiv 1$), la dinámica vectorial (3.19) se reduce a una dinámica Lindblad no-generalizada (2.29), y el estado vectorial clásico (3.18) es trivialmente la normalización de nuestro sistema.

3.2.2. Operadores matriciales de medidas

Los sistemas cuánticos están necesariamente acoplados a su entorno, incluso en los casos cuando el entorno es el propio vacío (razón por la cual los sistemas se desexcitan debido a su interacción con el campo electromagnético del vacío mediante un acoplamiento dipolo eléctrico-campo eléctrico). En nuestro caso particular estaremos interesados en sistemas fluorescentes de dos niveles inmersos en baños o entornos con características particulares. La finalidad de esta sección es introducir el desarrollo teórico necesario para poder inferir el estado de nuestro sistema (o más generalmente el estado vectorial cuántico) a partir de la señal clásica provista por un aparato de medición que se encuentra continuamente monitoreando nuestro sistema cuántico. Particularmente nuestro aparato de medición se trata de un detector de fotones.

Debido a que, formalmente hablando, las detecciones de fotones provistas por el aparato de medida son en realidad detecciones de fotones que viven en el espacio de Hilbert del baño, sabemos que los mismos son producto de las desexcitaciones de nues-

tro sistema de dos niveles. De este modo, cada medida proyectiva realizada sobre el baño (detección o no detección de un fotón) se describe como una medida generalizada hecha sobre nuestro sistema cuántico.

Recordando las mediciones generalizadas sobre matrices densidad descritas por la ecuación (3.13), y la normalización de los estados vectoriales cuánticos (3.16), se definen de manera natural los superoperadores matriciales de medidas generalizadas (no proyectivas) que llamaremos **operadores matriciales de medidas** como la transformación

$$\hat{\mathcal{M}}|\rho\rangle = \frac{\mathcal{J}|\rho\rangle}{\text{Tr}[(1|\mathcal{J}|\rho)]}, \quad (3.20)$$

con elementos de matriz $(\hat{\mathcal{M}})_{RR'} = (R|\hat{\mathcal{M}}|R')$ y donde \mathcal{J} se conocen como los superoperadores matriciales de medida no normalizados.

A modo de simplificación (ya que será el caso que trataremos), estos \mathcal{J} serán supuestos diagonales en la base vectorial $\{|R\rangle\}$ e independientes del tiempo. Los mismos tienen la forma

$$\mathcal{J}[\bullet] = \sum_R |R\rangle(R|V_R \bullet V_R^\dagger, \quad (3.21)$$

y actúan sobre un $|\rho\rangle$ arbitrario como

$$\mathcal{J}|\rho\rangle = \sum_R |R\rangle V_R \rho V_R^\dagger, \quad (3.22)$$

donde $\{V_R\}$, forman un conjunto de operadores de medida generalizados (3.13) y que están asociados a los procesos de medición que se pueden disponer en un experimento.

Finalmente, uno de nuestros primeros objetivos es, a partir de una dada dinámica caracterizada por \mathcal{L} , poder tener una expresión para el operador matricial de medida $\hat{\mathcal{M}}$, ya que las transformaciones que este induce (3.20) será uno de los ingredientes esenciales para inferir la evolución del estado vectorial del sistema a partir de las detecciones en nuestro aparato de medida.

A partir de la forma particular que tenga \mathcal{L} , siempre es posible (debido a la forma general de los superoperadores de Lindblad (2.31)) realizar una separación conveniente del mismo de acuerdo a los procesos de medición realizados. De modo que, reconociendo la forma de un operador de medición como los de la ecuación (3.21) en el operador matricial de Lindblad este puede escribirse o separarse como

$$\mathcal{L}|\rho_t\rangle = (\mathcal{D} + \mathcal{J})|\rho_t\rangle, \quad (3.23)$$

donde \mathcal{D} , por coherencia, viene dado por $\mathcal{D} \equiv \mathcal{L} - \mathcal{J}$.

De esta manera, obtenemos finalmente el operador matricial de medida $\hat{\mathcal{M}}$ inducido por \mathcal{J} de acuerdo a la ecuación (3.20). Esta transformación del sistema a partir de la aplicación de $\hat{\mathcal{M}}$ está asociada a que el aparato de medición detectó una dada transición entre los niveles de nuestro sistema cuántico. Por otro lado, el operador \mathcal{D} puede asociarse al caso complementario en que no se produjo ninguna detección.

3.2.3. Evolución condicional del estado vectorial cuántico

Paralelamente a la búsqueda de una expresión a partir de la dinámica de nuestro sistema para los operadores $\hat{\mathcal{M}}$, debemos también conocer cómo evoluciona nuestro estado vectorial cuántico entre dos dadas mediciones sucesivas de modo que, sabiendo cómo se transforma el estado cada vez que ocurren mediciones en nuestro detector y cómo evoluciona entre las mismas, tendremos todo lo necesario para poder reconstruir nuestro estado a partir de la señal clásica provista por nuestro detector (tics sucesivos en tiempos sucesivos aleatorios).

Bajo la suposición consistente de que la evolución de nuestro sistema entre dos mediciones sucesivas no está determinada por \mathcal{J} , la dinámica (3.19) se reduce a la contribución del operador matricial \mathcal{D} [Ec.(3.23)]

$$\frac{d|\tilde{\rho}_t\rangle}{dt} = \mathcal{D}|\tilde{\rho}_t\rangle, \quad (3.24)$$

o equivalentemente

$$|\tilde{\rho}_t\rangle = e^{\mathcal{D}t}|\rho_0\rangle, \quad (3.25)$$

donde $|\rho_0\rangle$ es una condición inicial arbitraria. Aquí $|\tilde{\rho}_t\rangle$ representa el estado vectorial cuántico (no-normalizado) y condicionado a que el sistema bipartito evoluciona entre dos detecciones sucesivas de nuestro aparato de medición.

La dinámica dada por la ecuación anterior (3.25) se interpreta como la *evolución condicional no-normalizada* del estado vectorial cuántico. Adicionalmente, la tilde “ \sim ” es para enfatizar el hecho de que esta evolución (generada por \mathcal{D} en lugar de \mathcal{L}) no conserva traza; sin embargo, las cantidades obtenidas al aplicar la operación $\text{Tr}(1|\bullet|)$ sobre la evolución de estos estados, tiene significado físico y utilidad central que se verá evidente en la próxima sección.

Para resolver este sistema (Eq. 3.24), se transforma Laplace ($|\tilde{\rho}_u\rangle = \mathcal{L}[|\tilde{\rho}_t\rangle] \equiv \int_0^\infty dt e^{-ut} |\tilde{\rho}_t\rangle$) y la solución general para alguna forma de \mathcal{D} (dada por la dinámica a

estudiar) y condición inicial arbitraria $|\rho_0\rangle$ es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\tilde{\rho}_t\rangle &= \mathcal{D} |\tilde{\rho}_t\rangle \\ (u - \mathcal{D}) |\tilde{\rho}_u\rangle &= |\rho_0\rangle \\ |\tilde{\rho}_t\rangle &\equiv e^{\mathcal{D}t} |\rho_0\rangle = \mathcal{L}^{-1} \left[(u - \mathcal{D})^{-1} |\rho_0\rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A partir de la ecuación (3.25), se define la **evolución condicional normalizada** de $|\rho_{t'}\rangle$ a un tiempo inicial t' como

$$|\rho_t^c\rangle = \hat{\mathcal{T}}(t, t') |\rho_{t'}\rangle \equiv \frac{e^{\mathcal{D}(t-t')} |\rho_{t'}\rangle}{\text{Tr} (1 | e^{\mathcal{D}(t-t')} |\rho_{t'}\rangle)}. \quad (3.27)$$

Esto nos permite calcular el estado vectorial cuántico a un tiempo arbitrario t desde un tiempo previo t' cuando estamos bajo la suposición de que dicha evolución ocurre entre dos mediciones sucesivas (a tiempos t' y t , $t > t'$).

3.2.4. Evolución estocástica del estado vectorial cuántico

Suponiendo una separación tipo (3.23) para el operador matricial de Lindblad, la solución formal de la dinámica (3.19) puede escribirse como [22]

$$|\rho_t\rangle = e^{\mathcal{D}t} |\rho_0\rangle + \int_0^t dt' e^{\mathcal{D}(t-t')} \mathcal{J} |\rho_{t'}\rangle. \quad (3.28)$$

Para resolver esta ecuación, propondremos como solución una serie tipo Dyson para el estado vectorial cuántico

$$|\rho_t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\rho_t^n\rangle, \quad (3.29)$$

con términos

$$|\rho_t^0\rangle = e^{\mathcal{D}t} |\rho_0\rangle, \quad (3.30)$$

$$|\rho_t^n\rangle = \int_0^t dt_n e^{\mathcal{D}(t-t_n)} \mathcal{J} |\rho_{t_n}^{n-1}\rangle \quad (3.31)$$

de modo que los términos de esta relación de recurrencia son los siguientes

$$\begin{aligned}
|\rho_t^0\rangle &= e^{\mathcal{D}t} |\rho_0\rangle, \\
|\rho_t^1\rangle &= \int_0^t dt_1 e^{\mathcal{D}(t-t_1)} \mathcal{J} e^{\mathcal{D}t_1} |\rho_0\rangle, \\
|\rho_t^2\rangle &= \int_0^t dt_2 e^{\mathcal{D}(t-t_2)} \mathcal{J} \int_0^{t_2} dt_1 e^{\mathcal{D}(t_2-t_1)} \mathcal{J} e^{\mathcal{D}t_1} |\rho_0\rangle, \\
&\vdots \\
|\rho_t^n\rangle &= \int_0^t dt_n e^{\mathcal{D}(t-t_n)} \mathcal{J} \dots \mathcal{J} \int_0^{t_2} dt_1 e^{\mathcal{D}(t_2-t_1)} \mathcal{J} e^{\mathcal{D}t_1} |\rho_0\rangle.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Veamos que esta expansión en series resuelve la dinámica de Lindblad (3.19). Tomando la derivada respecto al tiempo de (3.29) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d|\rho_t\rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[e^{\mathcal{D}t} |\rho_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_n e^{\mathcal{D}(t-t_n)} \mathcal{J} |\rho_{t_n}^{n-1}\rangle \right], \\
&= \mathcal{D} e^{\mathcal{D}t} |\rho_0\rangle + \mathcal{D} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_n e^{\mathcal{D}(t-t_n)} \mathcal{J} |\rho_{t_n}^{n-1}\rangle + \mathcal{J} \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_t^{n-1}\rangle, \\
&= (\mathcal{D} + \mathcal{J}) |\rho_t\rangle,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

como se quería demostrar.

El estado vectorial cuántico escrito como la serie de Dyson (3.29) puede expresarse a su vez en términos del propagador que define la evolución condicional normalizada (3.27) y del operador matricial de medida (3.20). Recursivamente, se obtiene la siguiente forma equivalente [22]

$$\begin{aligned}
|\rho_t\rangle &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n(t) |\rho_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} dt_n \dots dt_1 P_n[t, t^n] \\
&\quad \times \hat{\mathcal{T}}(t, t_n) \hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{T}}(t_n, t_{n-1}) \dots \hat{\mathcal{T}}(t_2, t_1) \hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{T}}(t_1, 0) |\rho_0\rangle,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde para el conjunto de tiempos $t^n \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ y a tiempo “ t ” se definen los pesos

$$\begin{aligned}
P_n[t, t^n] &\equiv P_0[(t, t_n); \hat{\mathcal{M}} | \rho_{t_n}] \\
&\quad \times \omega[(t_n, t_{n-1}); \hat{\mathcal{M}} | \rho_{t_{n-1}}] \\
&\quad \times \dots \times \omega[(t_2, t_1); \hat{\mathcal{M}} | \rho_{t_1}] \omega[(t_1, 0); |\rho_0\rangle],
\end{aligned} \tag{3.35}$$

los cuales estan determinados por los objetos

$$P_0[(t, t'); |\rho_{t'}\rangle] \equiv \text{Tr}[(1 | e^{\mathcal{D}(t-t')} | \rho_{t'})], \quad (3.36)$$

y además

$$\omega[(t, t'); |\rho_{t'}\rangle] \equiv \text{Tr}[(1 | \mathcal{J} e^{\mathcal{D}(t-t')} | \rho_{t'})]. \quad (3.37)$$

Finalmente $|\rho_{t_{i+1}}\rangle = \hat{\mathcal{T}}(t_{i+1}, t_i) \hat{\mathcal{M}} |\rho_{t_i}\rangle$. Las expresiones anteriores pueden demostrarse recursivamente para cada n particular (principio de inducción).

La acción de cada uno de los operadores matriciales $\{\mathcal{G}_n(t)\}$ de la ecuación (3.34), se define como aquel que mapea el estado vectorial cuántico $|\rho_0\rangle$ a $|\rho_t\rangle$ por una trayectoria o camino que tiene n detecciones ocurridas entre 0 y t a tiempos arbitrarios y ordenados $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Los pesos definidos por la ecuación (3.35) para todo tiempo “ t ” son siempre positivos, y están normalizados de acuerdo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} dt_n \dots dt_1 P_n[t, t^n] \equiv 1, \quad (3.38)$$

Así, $P_n[t, t^n]$ se puede interpretar como la densidad de probabilidad conjunta de n tiempos (t^n), hasta tiempo “ t ” de que el sistema evolucione por una trayectoria particular de detecciones (definida por los tiempos de detección t^n). Consecuentemente, como los intervalos de tiempo entre ocurrencias de detecciones son variables aleatorias (reales y continuas), estos intervalos, por construcción, tienen densidad de probabilidad dadas por los objetos $\omega[(t, t'); |\rho_{t'}\rangle]$, definidos en la ecuación (3.37) y que en consecuencia se llaman funciones de espera o **“waiting” functions** [22].

Adicionalmente, los objetos definidos por la ecuación (3.36), se trataban de las constantes de normalización asociadas a la evolución condicional no-normalizada. Estos objetos tienen significado físico, y son la probabilidad de que el sistema “sobreviva” a un decaimiento hasta el tiempo “ t ”, cuando el mismo evoluciona a partir de la última detección ocurrida a un tiempo inmediatamente anterior t' . Este objeto se lo denomina probabilidad de sobrevivencia o **“survival” probability** [22].

Veamos ahora que estas funciones (“waiting” y “survival”) no son independientes una de la otra; de hecho, se demuestra que, a partir de la normalización del estado vectorial cuántico en la dinámica matricial de Lindblad (3.19), se cumple la identidad

$$\text{Tr}(1 | \mathcal{D} | \bullet) = -\text{Tr}(1 | \mathcal{J} | \bullet); \quad (3.39)$$

de modo que, usando la propiedad anterior (3.39), y tomando derivada respecto a “ t ” de la “survival” (3.36) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_0[(t, t'); | \rho_{t'}] &= \text{Tr} (1 | \mathcal{D} e^{\mathcal{D}(t-t')} | \rho_{t'}) \\ &= -\text{Tr} (1 | \mathcal{J} e^{\mathcal{D}(t-t')} | \rho_{t'}) \\ &\equiv -\omega[(t, t'); | \rho_{t'}] . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Integrando esta expresión respecto a t y sabiendo que $P_0[(t', t'); | \rho_{t'}] \equiv 1$ obtenemos

$$P_0[(t, t'); | \rho_{t'}] = 1 - \int_{t'}^t d\tau \omega[(\tau, t'); | \rho_{t'}] . \quad (3.41)$$

Esta relación confirma que $\omega[(\tau, t'); | \rho_{t'}]$ es una función de espera y $P_0[(t, t'); | \rho_{t'}]$ su probabilidad de sobrevivencia asociada.

Finalmente, la trayectoria o *realización estocástica* buscada del estado vectorial cuántico cuya evolución parte de $| \rho_0)$, y con n detecciones durante su evolución, se define a partir de la ecuación (3.34) como

$$| \rho_t^{\text{st}}) \equiv \hat{\mathcal{T}}(t, t_n) \hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{T}}(t_n, t_{n-1}) \dots \hat{\mathcal{T}}(t_2, t_1) \hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{T}}(t_1, 0) | \rho_0) , \quad (3.42)$$

con densidad de probabilidad de ocurrencia $P_n[t, t^n]$. Así, hemos descompuesto la solución de Lindblad como suma explícita de trayectorias de medición.

A partir de la realización estocástica del estado vectorial cuántico $| \rho_t^{\text{st}})$ [Ec.(3.42)], podemos obtener (también en su forma vectorial) la distribución de probabilidad configuracional (como función del tiempo) de los “ R ” estados mesoscópicos en los que puede encontrarse el baño durante esta realización,

$$\begin{aligned} | P_t^{\text{st}}) &\equiv \sum_R \text{Tr} [\rho_R^{\text{st}}(t)] | R) \\ &= \sum_R P_R^{\text{st}}(t) | R) . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Bajo la definición anterior [Ec.(3.43)] los $\rho_R^{\text{st}}(t)$ representan a los estados auxiliares del sistema durante la realización y condicionados a que el baño se encuentre en la configuración R ,

$$\rho_R^{\text{st}}(t) \equiv (R | \rho_t^{\text{st}}) . \quad (3.44)$$

Similarmente, el estado estocástico del sistema como función del tiempo podemos escribirlo como

$$\begin{aligned}\rho_t^{\text{st}} &\equiv (1|\rho_t^{\text{st}}) \\ &= \sum_R \rho_R^{\text{st}}(t).\end{aligned}\tag{3.45}$$

Como comentario final, los objetos definidos anteriormente se encuentran normalizados como

$$(1|P_t^{\text{st}}) = \sum_R P_R^{\text{st}}(t) \equiv 1,\tag{3.46a}$$

$$\text{Tr} (1|\rho_t^{\text{st}}) = \sum_R \text{Tr} [\rho_R^{\text{st}}(t)] \equiv 1.\tag{3.46b}$$

A partir de los resultados de esta sección, observamos que por construcción, la solución (3.34) puede ser interpretada como un promedio sobre realizaciones, el cual recupera la evolución matricial tipo Lindblad generalizada (3.19), es decir

$$\overline{|\rho_t^{\text{st}})} \equiv |\rho_t),\tag{3.47}$$

donde la sobre barra denota promedio sobre realizaciones. Por consiguiente

$$\overline{\rho_t^{\text{st}}} \equiv \rho_t,\tag{3.48}$$

para el sistema, y

$$\overline{P_R^{\text{st}}(t)} \equiv P_R(t),\tag{3.49}$$

para cada probabilidad configuracional “ R ” del baño.

3.2.5. Generación de los tiempos de emisión

Dada una función de espera (arbitraria) $w(t)$, la misma define la densidad de probabilidad de un *intervalo de tiempo*. La generación de estos números aleatorios puede realizarse a través de la probabilidad de sobrevivencia asociada, $P_0(t) = 1 - \int_0^t dt' w(t')$ la cual, por normalización de la función de espera, $\int_0^\infty dt' w(t') = 1$, satisface $0 \leq P_0(t) \leq 1$. Entonces, se genera un número aleatorio real r , igualmente distribuido en el intervalo $(0, 1)$ y se encuentra el tiempo, también aleatorio, t_e resolviendo la ecuación $P_0(t_e) = r$. La densidad de probabilidad de la solución t_e está dada por $w(t)$.

En los ejemplos que veremos posteriormente, $w(t)$ puede ser siempre la misma función (fluorescencia), o ir variando a lo largo de la trayectoria (sucesivas emisiones). Este último caso se da en el caso de reservorios estructurados donde $w(t)$ a su vez depende de un parámetro aleatorio asociado a las probabilidades de cada configuración luego de una emisión.

3.2.6. Ecuación estocástica del estado vectorial cuántico

A modo de completitud, podemos mencionar que el estado vectorial estocástico $|\rho_t^{\text{st}}\rangle$ puede ser modelado mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica [1, 22]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\rho_t^{\text{st}}\rangle = & \left[\mathcal{D} - \text{Tr}(1 | \mathcal{D} | \rho_t^{\text{st}}) \right] |\rho_t^{\text{st}}\rangle \\ & + \left(\hat{\mathcal{M}} - 1 \right) |\rho_t^{\text{st}}\rangle \frac{dN_t}{dt}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

El primer término de la primera línea del miembro derecho de esta ecuación corresponde a la evolución condicional normalizada del sistema entre dos eventos consecutivos, es decir la dinámica descrita por la Ec.(3.27). La segunda línea corresponde a los cambios abruptos que sufre el estado del sistema al observarse alguna medición. Los superoperadores $\hat{\mathcal{M}}$ están definidos anteriormente en (3.20). Además se definen $dN_t/dt \equiv \sum_n \delta(t - t_n)$, donde $\{t_n\}$ son los tiempos donde se registra una detección en el aparato de medida. Al integrarlos directamente, vemos que N_t representa el número de conteos registrados en este aparato hasta tiempo t desde $t_0 = 0$ cuando empezaron a registrarse dichas mediciones.

Puede demostrarse que el promedio de la ecuación anterior recupera la evolución vectorial tipo Lindblad generalizada del sistema, (3.19). Bajo la definición de las cantidades anteriores, al tomar valor esperado de la ecuación (3.50) obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{d|\rho_t^{\text{st}}\rangle} = & \overline{\mathcal{D}|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dt - \overline{\text{Tr}(1 | \mathcal{D} | \rho_t^{\text{st}}) |\rho_t^{\text{st}}\rangle}dt \\ & + \overline{\hat{\mathcal{M}}|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dN_t - \overline{|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dN_t; \end{aligned} \quad (3.51)$$

Si, además, imponemos por consistencia que $\overline{dN_t} = \text{Tr}(1 | \mathcal{J} | \rho_t^{\text{st}})dt$, podemos usar el resultado [1] donde para un funcional arbitrario $\Xi = \Xi(N_t)$, como función del ruido N_t , se cumple la relación

$$\overline{\Xi(N_t)dN_t} = \overline{\Xi(N_t)} \text{Tr}(1 | \mathcal{J} | \rho_t^{\text{st}})dt, \quad (3.52)$$

de modo que los últimos dos términos de la ecuación (3.51) podemos escribirlos como

$$\begin{aligned} & \overline{\hat{\mathcal{M}}|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dN_t - \overline{|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dN_t \\ = & \overline{\hat{\mathcal{M}}|\rho_t^{\text{st}}\rangle} \text{Tr}(1 | \mathcal{J} | \rho_t^{\text{st}})dt - \overline{|\rho_t^{\text{st}}\rangle} \text{Tr}(1 | \mathcal{J} | \rho_t^{\text{st}})dt \\ = & \overline{\mathcal{J}|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dt + \overline{|\rho_t^{\text{st}}\rangle} \text{Tr}(1 | \mathcal{D} | \rho_t^{\text{st}})dt. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sustituyendo estos términos de (3.53), en la ecuación (3.51), obtenemos

$$\overline{d|\rho_t^{\text{st}}\rangle} = \overline{\mathcal{D}|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dt + \overline{\mathcal{J}|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dt \equiv \overline{\mathcal{L}|\rho_t^{\text{st}}\rangle}dt. \quad (3.54)$$

Finalmente queda demostrado que el promedio de la ecuación (3.50) propuesta para la dinámica estocástica de $|\rho_t^{\text{st}}\rangle$, recupera la dinámica tipo ecuación vectorial de Lindblad generalizada para los estados vectoriales cuánticos (3.19).

3.2.7. Saltos cuánticos aplicados a reservorios con temperatura efectiva cero

En esta sección estudiaremos la dinámica estocástica del estado de un sistema en contacto con un reservorio térmico a temperatura efectiva cero [Ec.(2.34)], sin fluctuaciones clásicas. Así, el sistema puede interpretarse como una transición óptica, donde el aparato de medida es un detector de fotones.

La dinámica descrita por la ecuación (2.34), en la representación interacción puede reescribirse en la forma:

$$\frac{d\rho_t}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \{\sigma^\dagger \sigma, \rho_t\} + \gamma(\sigma \rho_t \sigma^\dagger). \quad (3.55)$$

Podemos observar que este sistema presenta la estructura definida por la ecuación de Lindblad (3.19) con la simplificación de que el estado vectorial del sistema $|\rho_t\rangle$, se reduce a ρ_t debido a que solo existe una única configuración posible para el baño ($R_{\text{max}} = 1$); consecuentemente, los superoperadores matriciales $\{\mathcal{D}, \mathcal{J}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{M}}\}$ poseen una única componente.

Como operador de medida tomamos $\sigma = |- \rangle \langle +|$, dando lugar a

$$\mathcal{J}[\rho_t] \equiv \gamma(\sigma \rho_t \sigma^\dagger). \quad (3.56)$$

Consecuentemente, [Ec.(3.13)]

$$\hat{\mathcal{M}}[\rho_t] = |- \rangle \langle -|. \quad (3.57)$$

Así, coherentemente, una detección implica la reducción del sistema a su estado de menos energía, e implica la transición $\rho_t \rightarrow |- \rangle \langle -|$.

El operador asociado a la evolución condicional debe ser, por consistencia,

$$\mathcal{D}[\rho_t] \equiv (\mathcal{L} - \mathcal{J})[\rho_t] = -\frac{\gamma}{2} \{\sigma^\dagger \sigma, \rho_t\}. \quad (3.58)$$

La evolución condicional (3.24) resulta ser

$$d\tilde{\rho}_t/dt \equiv \mathcal{D}[\tilde{\rho}_t] = -\frac{\gamma}{2} \{\sigma^\dagger \sigma, \tilde{\rho}_t\}. \quad (3.59)$$

Definiendo

$$\tilde{\rho}_t = \begin{pmatrix} \tilde{p}(t) & \tilde{c}(t) \\ \tilde{c}^*(t) & \tilde{q}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

la evolución anterior es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{p}(t) = -\gamma\tilde{p}(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{c}(t) = -\frac{\gamma}{2}\tilde{c}(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{c}^*(t) = -\frac{\gamma}{2}\tilde{c}^*(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{q}(t) = 0, \end{cases} \quad (3.61)$$

cuya solución analítica viene dada por

$$\begin{cases} \tilde{p}(t) = \tilde{p}(0)e^{-\gamma t}, \\ \tilde{c}(t) = \tilde{c}(0)e^{-\gamma t/2}, \\ \tilde{c}^*(t) = \tilde{c}^*(0)e^{-\gamma t/2}, \\ \tilde{q}(t) = \tilde{q}(0). \end{cases} \quad (3.62)$$

De este modo, la evolución condicional normalizada del sistema para una condición inicial arbitraria, de acuerdo a la ecuación (3.27),

$$\rho_t^c \equiv \hat{\mathcal{T}}(t, 0)\rho_0 = \frac{e^{\mathcal{D}t}\rho_0}{\text{Tr}[e^{\mathcal{D}t}\rho_0]} = \frac{\tilde{\rho}_t}{\text{Tr}[\tilde{\rho}_t]}, \quad (3.63)$$

está dada por:

$$\begin{cases} p(t) = \frac{p(0)e^{-\gamma t}}{q(0)+p(0)e^{-\gamma t}}, \\ c(t) = \frac{c(0)e^{-\gamma t/2}}{q(0)+p(0)e^{-\gamma t}}, \\ c^*(t) = \frac{c^*(0)e^{-\gamma t/2}}{q(0)+p(0)e^{-\gamma t}}, \\ q(t) = \frac{q(0)}{q(0)+p(0)e^{-\gamma t}}. \end{cases} \quad (3.64)$$

De estas ecuaciones notamos que si $\rho_0 = |-\rangle\langle -|$, entonces $\rho_t^c = |-\rangle\langle -|$, $\forall t > 0$, es decir: si el sistema comienza en el estado inferior su evolución para todo tiempo se mantendrá en dicho estado. Contrariamente, si el sistema se prepara inicialmente en el estado superior $\rho_0 = |+\rangle\langle +|$ ($q(0) = c(0) = c^*(0) = 0$, y $p(0) = 1$), el sistema permanece en ese estado hasta que ocurra la primera transición $|+\rangle\langle +| \rightarrow |-\rangle\langle -|$. En cambio, si el sistema se prepara en un estado mixto (por ejemplo $\rho_0 = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|)$), la población superior del sistema en cualquiera de las realizaciones decae exponencialmente hasta que ocurra la primera transición. Estos comportamientos pueden verse en la Fig.(3.1).

Para esta dinámica, la “survival” (3.36) y la “waiting” (3.37), cuando el estado

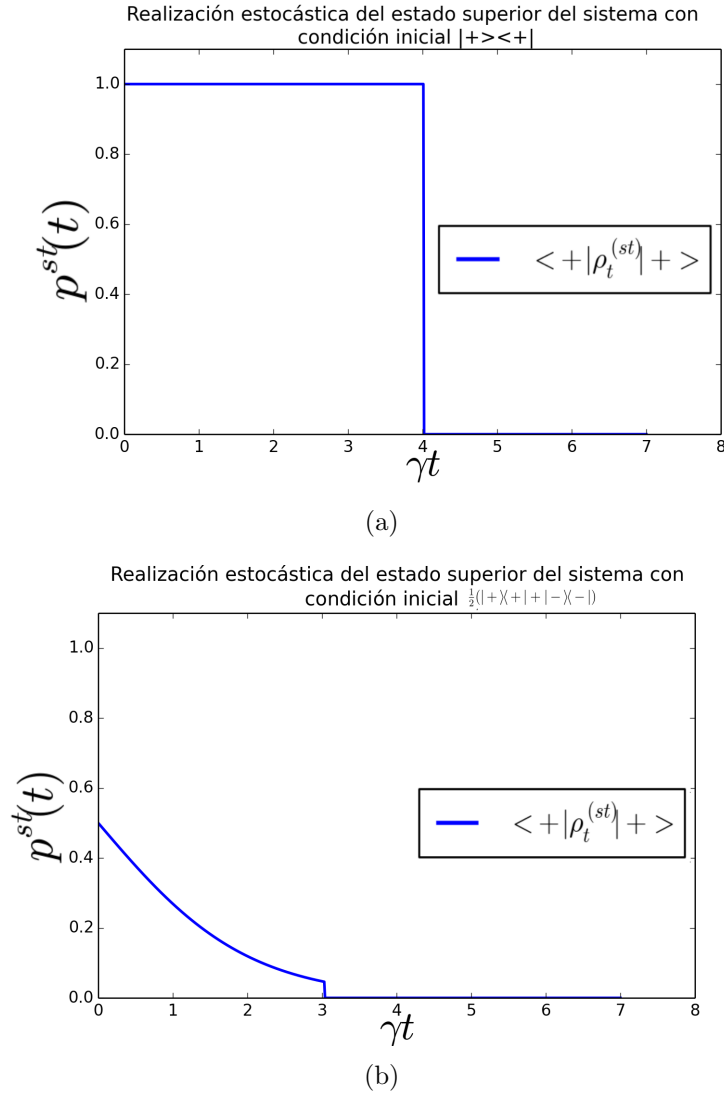


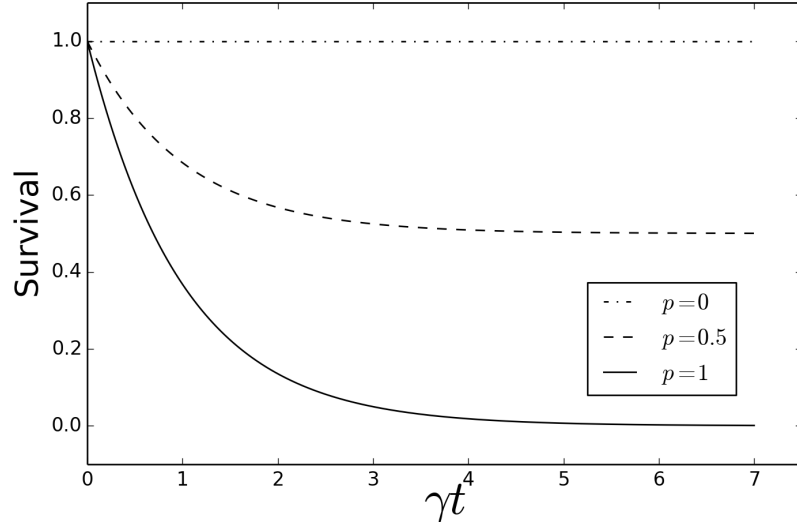
Figura 3.1: Realización estocástica de la población superior del sistema cuando el estado inicial es (a) $|+\rangle\langle+|$, y (b) cuando el estado inicial del sistema es el estado mezcla $\frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)$. La temperatura efectiva del reservorio es nula.

inicial es la mezcla $\rho_0 = p|+\rangle\langle+| + (1-p)|-\rangle\langle-|$, toman la forma

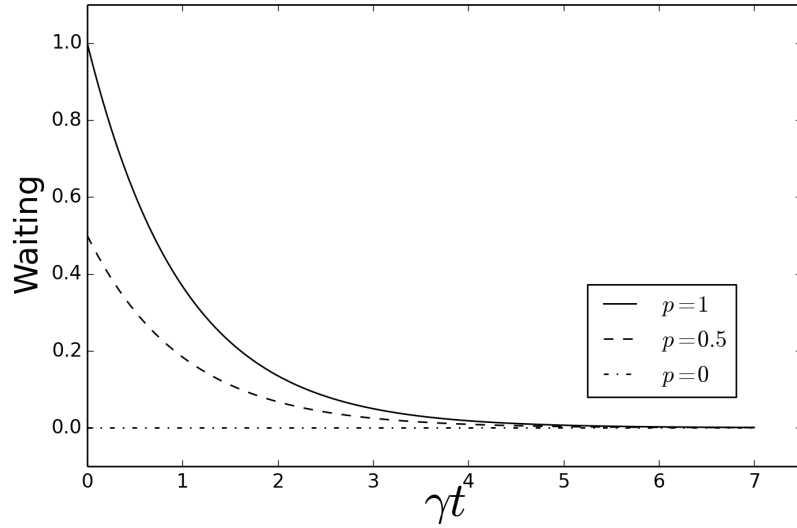
$$\begin{aligned} P_0[(t, 0); |\rho_0\rangle] &= \text{Tr}[(1|e^{\mathcal{D}t}|\rho_0)] = \text{Tr}[\tilde{\rho}_t] \\ &= 1 - p(1 - e^{-\gamma t}), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \omega[(t, 0); |\rho_0\rangle] &= \text{Tr}[(1|\mathcal{J}e^{\mathcal{D}t}|\rho_0)] = \text{Tr}[\mathcal{J}\tilde{\rho}_t] \\ &= \gamma\langle+|\tilde{\rho}_t|+\rangle = \gamma p e^{-\gamma t}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Sus comportamientos para varios valores de la probabilidad de poblar el estado de mayor energía, parámetro de mezcla p , se muestran en la Fig.(3.2).



(a)

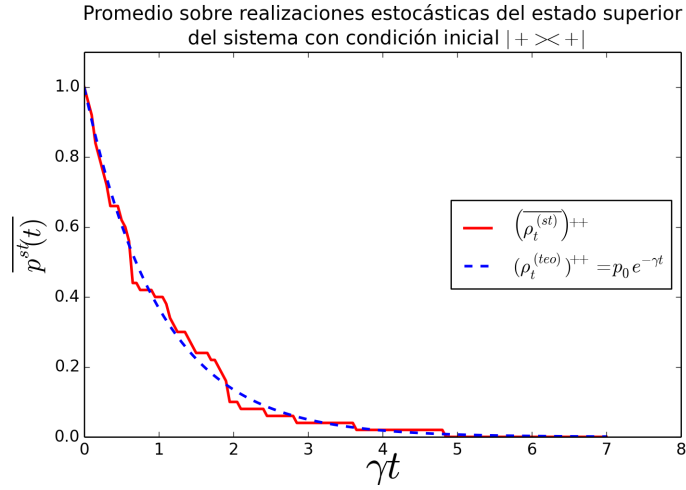


(b)

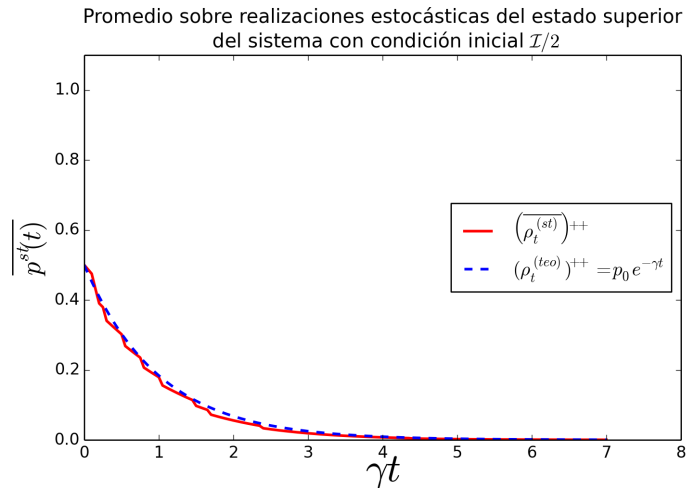
Figura 3.2: (a) “Survival” y (b) “Waiting” para un sistema de dos niveles con separación entre niveles en el régimen óptico, dinámica en la representación de interacción y tasa de decaimiento natural “ γ ” entre niveles cuando se prepara el sistema en el estado mezcla $\rho_0 = p|+\rangle\langle+| + (1-p)|-\rangle\langle-|$.

Para la construcción de las realizaciones [Fig.(3.1)], numéricamente generamos los tiempos aleatorios de colapso de la matriz densidad del sistema a partir de la “survival” [Ec.(3.65)]. Dado que la “waiting” se anula luego de ocurrido el colapso no esperamos más emisiones. Esto coincide con lo esperado, ya que luego de la primer detección el sistema está en su estado base. Dado que las perturbaciones térmicas de un sistema óptico real no provienen de suficiente energía para inducir una excitación al nivel superior, el sistema permanece en el nivel inferior para siempre.

Finalmente, podemos corroborar que, realizando un promedio sobre realizaciones asociadas a los distintos tiempos de emisión, recuperamos la dinámica de Lindblad, Fig.(3.3). El promedio es denotado con la barra superior [Ec.(3.47)].



(a)



(b)

Figura 3.3: Promedio con 50 realizaciones de la evolución de la población superior del sistema [Fig.(3.1)] usando el método de saltos cuánticos para un sistema de dos niveles con tasa de decaimiento γ en contacto con un reservorio térmico a temperatura efectiva cero cuando (a) está preparado con condición inicial $\rho_0 = |+\rangle\langle+|$ y (b) con condición inicial $\rho_0 = (1/2)\mathcal{I}$.

3.2.8. Saltos cuánticos en sistemas fluorescentes

La dinámica para la matriz densidad de un sistema fluorescente acoplado en resonancia con radiación láser, en una representación interacción, evoluciona como [Ec.(2.47)] (donde hemos supuesto que el láser está en resonancia con el sistema y además hemos

desarrollado los conmutadores)

$$\frac{d\rho_t}{dt} = -i\frac{\Omega}{2}[\sigma_x, \rho_t] - \frac{\gamma}{2}\{\sigma^\dagger\sigma, \rho_t\}_+ + \gamma\sigma\rho_t\sigma^\dagger, \quad (3.67)$$

donde el reservorio está a temperatura efectiva cero y solo posee un estado configuracional. Reconociendo el último término de esta ecuación como la acción del operador de medida generalizada $\sigma = |-\rangle\langle +|$, obtenemos [1-4]

$$\mathcal{J}[\rho_t] = \gamma(\sigma\rho_t\sigma^\dagger), \quad (3.68)$$

y consecuentemente [Ec.(3.20)]

$$\hat{\mathcal{M}}[\rho_t] = |-\rangle\langle -|. \quad (3.69)$$

Nuevamente, una detección en el aparato de medida implica la reducción del estado del sistema a su nivel inferior. Habiendo reconocido \mathcal{J} de la ecuación (3.67), podemos entonces escribir la evolución condicional no normalizada como [Ec.(3.24)]

$$\frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} \equiv \mathcal{D}[\tilde{\rho}_t] = -i\frac{\Omega}{2}[\sigma_x, \tilde{\rho}_t] - \frac{\gamma}{2}\{\sigma^\dagger\sigma, \tilde{\rho}_t\}_+; \quad (3.70)$$

donde, bajo la notación usual de matrices densidad para la evolución condicional que venimos usando [Ec.(3.60)], las ecuaciones diferenciales a resolver son

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{p}(t) &= -\gamma\tilde{p}(t) + i\frac{\Omega}{2}(\tilde{c}(t) - \tilde{c}^*(t)), \\ \frac{d}{dt}\tilde{c}(t) &= -\frac{\gamma}{2}\tilde{c}(t) + i\frac{\Omega}{2}(\tilde{p}(t) - \tilde{q}(t)), \\ \frac{d}{dt}\tilde{c}^*(t) &= -\frac{\gamma}{2}\tilde{c}^*(t) - i\frac{\Omega}{2}(\tilde{p}(t) - \tilde{q}(t)), \\ \frac{d}{dt}\tilde{q}(t) &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{c}(t) - \tilde{c}^*(t)). \end{cases} \quad (3.71)$$

Para la condición inicial $\rho_0 = |-\rangle\langle -|$, las soluciones son

$$\begin{cases} \tilde{p}(t) &= \left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\sinh\left(\frac{\Gamma}{2}t\right) \right]^2, \\ \tilde{c}(t) &= \frac{i}{4} \left(\frac{\gamma\Omega}{\Gamma^2}\right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[1 - \cosh(\Gamma t) - \left(\frac{2\Gamma}{\gamma}\right) \sinh(\Gamma t) \right], \\ \tilde{c}^*(t) &= -\frac{i}{4} \left(\frac{\gamma\Omega}{\Gamma^2}\right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[1 - \cosh(\Gamma t) - \left(\frac{2\Gamma}{\gamma}\right) \sinh(\Gamma t) \right], \\ \tilde{q}(t) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[1 - \left(\frac{2\Gamma^2 + \Omega^2}{\Omega^2}\right) \cosh(\Gamma t) - \left(\frac{\gamma\Gamma}{\Omega^2}\right) \sinh(\Gamma t) \right], \end{cases} \quad (3.72)$$

donde $\Gamma \equiv \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \Omega^2}$.

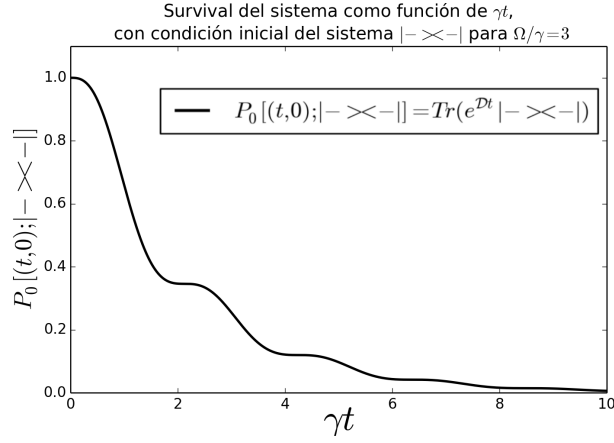
A partir de la solución analítica [Ec.(3.72)], las expresiones para la “survival” y la

“waiting” son explícitamente [2, 24]

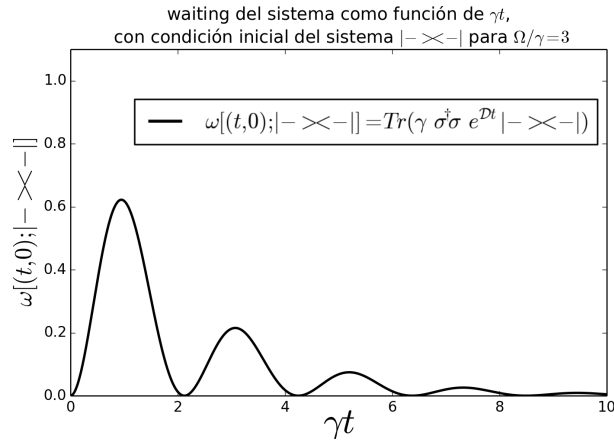
$$\begin{aligned} P_0[(t, 0); |-\rangle\langle -|] &= \text{Tr}[\tilde{\rho}_t] = \tilde{p}(t) + \tilde{q}(t) \\ &= -\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{\Omega}\right)^2 \cosh(\Gamma t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma\Gamma}{\Omega^2}\right) \sinh(\Gamma t) \right], \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \omega[(t, 0); |-\rangle\langle -|] &= \gamma \tilde{p}(t) \\ &= \gamma \left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\sinh\left(\frac{\Gamma}{2}t\right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Sus comportamientos como función del tiempo pueden verse en la Fig.(3.4).



(a)



(b)

Figura 3.4: (a) “Survival” y (b) “Waiting” para un sistema fluorescente en resonancia con un láser externo. El parámetro de acoplamiento dipolo-campo eléctrico está dado por $\Omega/\gamma = 3$, donde γ es la tasa de decaimiento. La condición inicial es $\rho_0 = |-\rangle\langle -|$ y las medidas son realizadas por un fotodetector con operador de medida Ec.(3.69).

A partir de la expresión analítica de la “survival” [Ec.(3.73)], generamos los tiempos

aleatorios de emisión, de modo que una de las trayectorias estocásticas [Ec.(3.42)] y, en particular, para la población superior de nuestro sistema cuántico, toma la forma mostrada en la Fig.(3.5).

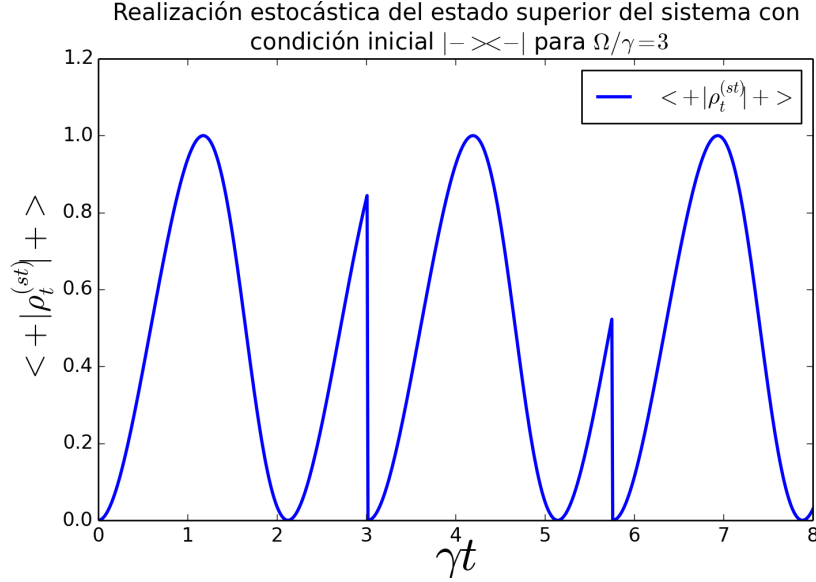


Figura 3.5: Realización estocástica para la población superior del sistema cuando se prepara en $\rho_0 = |-\rangle\langle -|$ y el parámetro de acoplamiento dipolo-campo eléctrico respecto a la tasa de decaimiento natural γ del sistema es $\Omega/\gamma = 3$

Puede verse que, incluso luego de ocurrida una emisión, el sistema evoluciona poblando nuevamente el estado superior. A diferencia del caso anterior (sin excitación externa, Fig.(3.1)), esto es debido a la dinámica unitaria inducida por la interacción con el láser. Es también importante notar que, salvo para el primer salto inicial, luego de cada medición el sistema evoluciona siempre a partir del estado $|-\rangle\langle -|$ y como consecuencia todas las sucesivas funciones de espera entre mediciones son iguales entre sí; esta propiedad se conoce como **proceso de renovación**. Esto es, los intervalos de tiempo entre detecciones sucesivas son gobernadas por la misma densidad de probabilidad.

Los procesos de renovación pueden verse también como una generalización de un proceso de Poisson, donde las densidades de probabilidad de intervalos de tiempo entre detecciones no son necesariamente distribuciones exponenciales, como en el caso Poisson, sino que las “waiting times” pueden tomar formas más generales como en nuestro caso la Ec.(3.74).

Finalmente, comprobamos que promediando sobre realizaciones se recupera la dinámica de Lindblad [Fig.(3.6)].

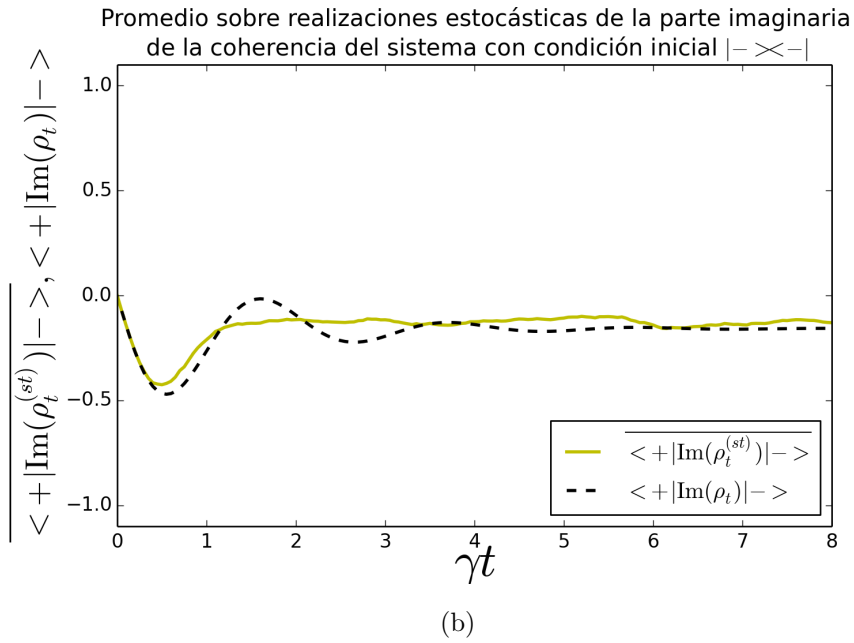
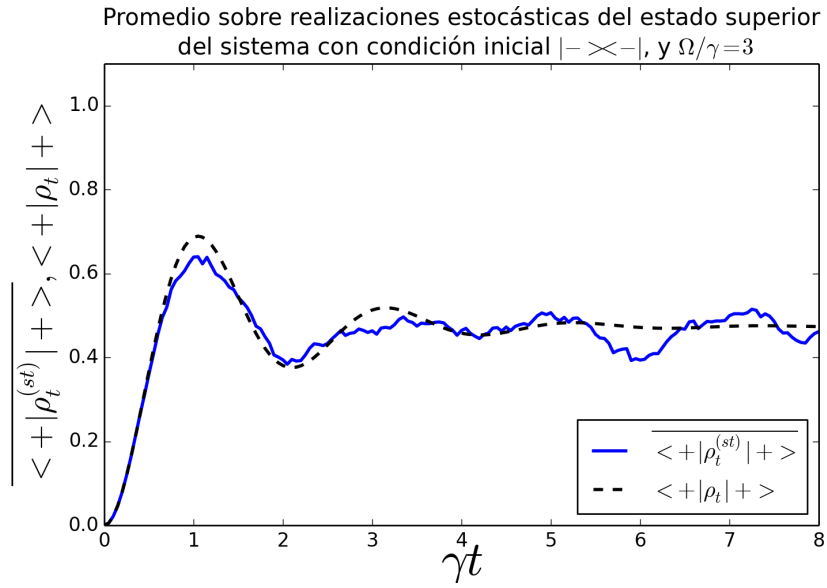


Figura 3.6: Promedio sobre 200 realizaciones para (a) la población superior del sistema y (b) coherencia en la dinámica de fluorescencia cuando el sistema se prepara en el estado $\rho_0 = |- \rangle \langle -|$. Los parámetros son $\Omega/\gamma = 3$.

3.2.9. Método de saltos cuánticos para reservorios auto-fluctuantes

Similarmente al capítulo anterior, en este ejemplo el estado del baño fluctúa entre más de un estado configuracional mesoscópico, y particularmente de forma independiente (reservorio auto-fluctuante) del sistema cuántico [17]. El aparato de medida solo provee información sobre la evolución del sistema cuántico. Entonces dicha dinámica es

no-local en el tiempo (efectos de memoria), pero aún así el método de saltos cuánticos es capaz de predecir $|\rho_t\rangle$ a partir de la dinámica tipo Lindblad generalizada que siguen los estados auxiliares $\{\rho_R\}$. Estos estados auxiliares (estado del sistema condicionado a que el baño está en la configuración R), debido a la dinámica del baño, se encuentran acoplados (de forma clásica) entre sí y además, en forma indistinta, evolucionan teniendo en cuenta la excitación del láser externo (en resonancia).

Para la aplicación del método de saltos cuánticos a la dinámica de reservorios auto-fluctuantes es necesario tomar la dinámica descrita por la ecuación (2.61) y a partir de la misma poder reconocer el operador matricial de medida asociado al aparato de medición del que disponemos y consecuentemente a esta separación del superoperador \mathcal{L} , describir la evolución condicional del sistema bipartito. Seguidamente, a partir de la separación $\mathcal{L} = \mathcal{D} + \mathcal{J}$, obtenemos $\hat{\mathcal{T}}$ y $\hat{\mathcal{M}}$. Finalmente, con estos superoperadores y los intervalos de tiempo dados por nuestro aparato de medida (o en nuestro caso generados numéricamente a partir de la “waiting” y la “survival”) construiremos las realizaciones estocásticas del estado vectorial cuántico $|\rho_t^{\text{st}}\rangle$.

A partir de la ecuación (2.61), si multiplicamos por $|R\rangle$ y sumamos sobre todos los estados configuracionales obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\rho_t\rangle = & -\frac{i\Omega}{2} \sum_R |R\rangle [\sigma_x, \rho_R(t)] - \sum_R |R\rangle \frac{\gamma_R}{2} \{\sigma^\dagger \sigma, \rho_R(t)\} \\ & + \sum_{RR'} |R\rangle \gamma_{RR'} \rho_{R'}(t) - \sum_{RR'} |R\rangle \gamma_{R'R} \rho_R(t) \\ & + \sum_R |R\rangle \gamma_R \sigma \rho_R(t) \sigma^\dagger, \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde trabajaremos las líneas del miembro derecho de esta ecuación.

La primera línea la podemos escribir como

$$\begin{aligned} & -\frac{i\Omega}{2} \sum_R |R\rangle [\sigma_x, \rho_R(t)] - \sum_R |R\rangle \frac{\gamma_R}{2} \{\sigma^\dagger \sigma, \rho_R(t)\} \\ & = -\frac{i\Omega}{2} \sum_{RR'} |R'\rangle (R'|R) [\sigma_x, \rho_R(t)] - \sum_{RR'} |R'\rangle (R'|R) \frac{\gamma_{R'}}{2} \{\sigma^\dagger \sigma, \rho_R(t)\} \\ & = \left(-\frac{i\Omega}{2} \sum_R |R\rangle (R| [\sigma_x, \bullet] - \sum_R \frac{\gamma_R}{2} |R\rangle (R| \{\sigma^\dagger \sigma, \bullet\}) \right) |\rho_t\rangle, \end{aligned} \quad (3.76)$$

la segunda

$$\begin{aligned}
& \sum_{RR'} |R\rangle \gamma_{RR'} \rho_{R'}(t) - \sum_{R'R} |R\rangle \gamma_{R'R} \rho_R(t) \\
&= \sum_{RR'} \gamma_{RR'} |R\rangle \langle R'| \rho_t - \sum_{R'R} \gamma_{R'R} |R\rangle \langle R| \rho_t \\
&= \sum_{RR'} \left(\gamma_{RR'} |R\rangle \langle R'| - \gamma_{R'R} |R\rangle \langle R| \right) \rho_t, \tag{3.77}
\end{aligned}$$

y la tercera finalmente como

$$\begin{aligned}
& \sum_R |R\rangle \gamma_R \sigma \rho_R(t) \sigma^\dagger \\
&= \sum_R \gamma_R |R\rangle \sigma \langle R| \rho_t \sigma^\dagger = \left(\sum_R \gamma_R |R\rangle \langle R| \sigma \bullet \sigma^\dagger \right) \rho_t. \tag{3.78}
\end{aligned}$$

Reconociendo a \mathcal{L} como la suma de las tres líneas (3.76 + 3.77 + 3.78) y reconociendo a (3.78) como la acción sobre $|\rho_t\rangle$ de un operador matricial de medida no-normalizado \mathcal{J} tipo ecuación (3.21), tenemos que este superoperador (para nuestra dinámica) está dado por

$$\mathcal{J} = \sum_R \gamma_R |R\rangle \langle R| \sigma \bullet \sigma^\dagger. \tag{3.79}$$

Esta definición tiene en cuenta todas las contribuciones asociadas a una detección, $\sigma \bullet \sigma^\dagger$, indistintamente del estado configuracional del baño. Por otro lado, tendremos que $\mathcal{D} \equiv \mathcal{L} - \mathcal{J}$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = & - \sum_R |R\rangle \langle R| \left(\frac{i\Omega}{2} [\sigma_x, \bullet] + \frac{\gamma_R}{2} \{ \sigma^\dagger \sigma, \bullet \} + \sum_{R'} \gamma_{R'R} \bullet \right) \\
& + \sum_{RR'} \gamma_{RR'} |R\rangle \langle R'| \bullet. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Finalmente, nuestra dinámica tipo Lindblad generalizada para el sistema fluorescente acoplado con un láser en resonancia y en contacto con un reservorio autofluotante queda reescrita, en notación vectorial, como

$$\frac{d}{dt} |\rho_t\rangle = (\mathcal{D} + \mathcal{J}) |\rho_t\rangle, \tag{3.81}$$

donde \mathcal{D} y \mathcal{J} , están dados por las Ecs.(3.80), y (3.79), respectivamente.

Seguidamente a ésto, y necesariamente para obtener el propagador $\hat{\mathcal{T}}$ de nuestra

dinámica, debemos primero resolver la dinámica condicional dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\tilde{\rho}_t\rangle &\equiv \mathcal{D} |\tilde{\rho}_t\rangle \\ &= -\frac{i\Omega}{2} \sum_R |R\rangle [\sigma_x, \tilde{\rho}_R(t)] - \sum_R |R\rangle \frac{\gamma_R}{2} \{\sigma^\dagger \sigma, \tilde{\rho}_R(t)\} \\ &\quad + \sum_{RR'} |R\rangle \gamma_{RR'} \tilde{\rho}_{R'}(t) - \sum_{R'R} |R\rangle \gamma_{R'R} \tilde{\rho}_R(t), \end{aligned} \quad (3.82)$$

donde la tilde (\sim) es para diferenciar esta evolución condicional no normalizada del estado vectorial cuántico $|\rho_t\rangle$ [Ec.(3.81)].

La evolución condicional normalizada se sigue de

$$|\rho_t^c\rangle = \hat{\mathcal{T}}(t, 0) |\rho_0^c\rangle = \frac{\sum_R \tilde{\rho}_R(t) |R\rangle}{\sum_{R'} \text{Tr}[\tilde{\rho}_{R'}(t)]}, \quad (3.83)$$

donde el factor $\sum_{R'} \text{Tr}[\tilde{\rho}_{R'}(t)]$ es la normalización.

Aún resta por definir la condición inicial para la evolución condicional. A partir de \mathcal{J} de la ecuación (3.79), definimos la acción de $\hat{\mathcal{M}}$ sobre $|\rho^{\text{st}}\rangle$ (el estado al final de la evolución condicional) como

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}} |\rho^{\text{st}}\rangle &\equiv \left(\frac{\sum_R \gamma_R |R\rangle \langle R| \sigma \bullet \sigma^\dagger}{\text{Tr}(1 | \sum_R \gamma_R |R\rangle \langle R| \sigma \bullet \sigma^\dagger)} \right) |\rho^{\text{st}}\rangle \\ &= \frac{\sum_R \gamma_R \sigma \rho_R^{\text{st}} \sigma^\dagger |R\rangle}{\sum_R \gamma_R \text{Tr}[\sigma \rho_R^{\text{st}} \sigma^\dagger]} \\ &= |-\rangle \langle -| \frac{\sum_R \gamma_R (\langle + | \rho_R^{\text{st}} | + \rangle) |R\rangle}{\sum_R \gamma_R \langle + | \rho_R^{\text{st}} | + \rangle}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Como dijimos anteriormente, estas expresiones siguen de considerar todos los términos que, independientemente del estado configuracional, dan lugar a una transición del estado superior al inferior del sistema cuántico. Es por ello que en dichas expresiones aparece una suma sobre R . Podemos reescribir la expresión anterior como

$$\hat{\mathcal{M}} |\rho^{\text{st}}\rangle \equiv |-\rangle \langle -| \sum_R P_R^{\text{st}} |R\rangle, \quad (3.85)$$

lo cual define los pesos P_R^{st} . A su vez, esta expresión nos da la estructura de la condición inicial para la evolución condicional entre detecciones.

La forma explícita de la evolución $|\tilde{\rho}_t\rangle$, escrita en términos de sus elementos matriciales para cada estado configuracional del baño (y bajo la notación para matrices

densidad 2x2 [Eq.(3.60)] es

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_a(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{c}_a^*(t) - \tilde{c}_a(t)\right) - \gamma_a\tilde{p}_a(t) + \gamma_{ab}\tilde{p}_b(t) - \gamma_{ba}\tilde{p}_a(t) \quad (3.86a)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}_a(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{q}_a(t) - \tilde{p}_a(t)\right) - \frac{1}{2}\gamma_a\tilde{c}_a(t) + \gamma_{ab}\tilde{c}_b(t) - \gamma_{ba}\tilde{c}_a(t) \quad (3.86b)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}_a^*(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{p}_a(t) - \tilde{q}_a(t)\right) - \frac{1}{2}\gamma_a\tilde{c}_a^*(t) + \gamma_{ab}\tilde{c}_b^*(t) - \gamma_{ba}\tilde{c}_a^*(t) \quad (3.86c)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_a(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{c}_a(t) - \tilde{c}_a^*(t)\right) + \gamma_{ab}\tilde{q}_b(t) - \gamma_{ba}\tilde{q}_a(t) \quad (3.86d)$$

para la configuración a , y

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_b(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{c}_b^*(t) - \tilde{c}_b(t)\right) - \gamma_b\tilde{p}_b(t) + \gamma_{ba}\tilde{p}_a(t) - \gamma_{ab}\tilde{p}_b(t) \quad (3.87a)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}_b(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{q}_b(t) - \tilde{p}_b(t)\right) - \frac{1}{2}\gamma_b\tilde{c}_b(t) + \gamma_{ba}\tilde{c}_a(t) - \gamma_{ab}\tilde{c}_b(t) \quad (3.87b)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}_b^*(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{p}_b(t) - \tilde{q}_b(t)\right) - \frac{1}{2}\gamma_b\tilde{c}_b^*(t) + \gamma_{ba}\tilde{c}_a^*(t) - \gamma_{ab}\tilde{c}_b^*(t) \quad (3.87c)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_b(t) = -\frac{i\Omega}{2}\left(\tilde{c}_b(t) - \tilde{c}_b^*(t)\right) + \gamma_{ba}\tilde{q}_a(t) - \gamma_{ab}\tilde{q}_b(t) \quad (3.87d)$$

para la configuración b , donde estos subíndices $\{a, b\}$ representan los estados configuracionales del baño.

La evolución condicional normalizada del estado vectorial cuántico a partir de estas ecuaciones [Ecs.(3.86), y (3.87)] es

$$\begin{aligned} |\rho_t^c\rangle &\equiv \hat{\mathcal{T}}(t, 0) |\rho_0\rangle = \rho_a^c(t) |a\rangle + \rho_b^c(t) |b\rangle \\ &= \frac{\tilde{\rho}_a(t)}{\text{Tr}(\tilde{\rho}_a(t) + \tilde{\rho}_b(t))} |a\rangle + \frac{\tilde{\rho}_b(t)}{\text{Tr}(\tilde{\rho}_a(t) + \tilde{\rho}_b(t))} |b\rangle, \end{aligned} \quad (3.88)$$

Dado que la condición inicial para la evolución condicional es el estado vectorial después de una detección, como condición inicial para esta evolución tomaremos $|\rho_0\rangle = |-\rangle\langle -| [p|a\rangle + (1-p)|b\rangle]$ [Ec.(3.85), con $P_R^{\text{st}} \rightarrow \{p, 1-p\}$], donde cada sumando corresponde a las condiciones iniciales de los estados auxiliares $\{\rho_a(0), \rho_b(0)\}$, respectivamente. El parámetro p mide la probabilidad inicial de cada estado configuracional del baño después de cada medición. En la evolución estocástica esto pasa a ser un parámetro aleatorio. La condición inicial del sistema fluorescente consistentemente resulta $\rho_0 = |-\rangle\langle -|$.

A partir de la solución de la evolución condicional dada por las ecuaciones (3.86), y (3.87), y usando la expresión para \mathcal{J} dada por la ecuación (3.79), obtenemos la “survival” (3.36) y la waiting (3.37), respectivamente de nuestra dinámica. Dichos objetos los mostramos en la Fig.(3.7), y coinciden con las curvas obtenidas en la referencia [22].

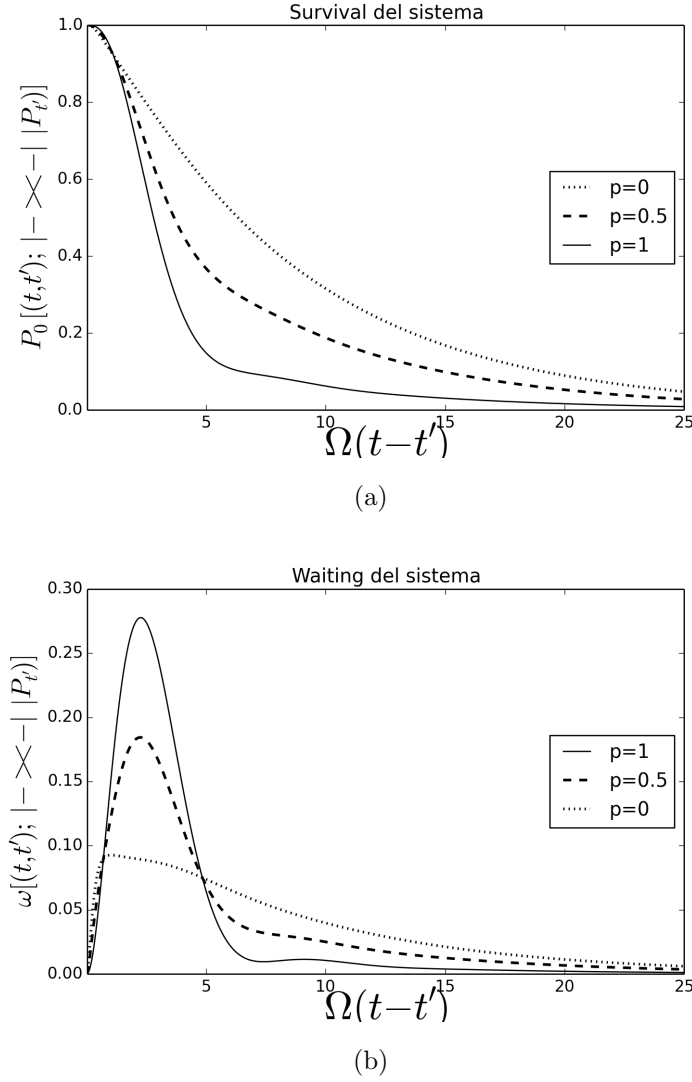
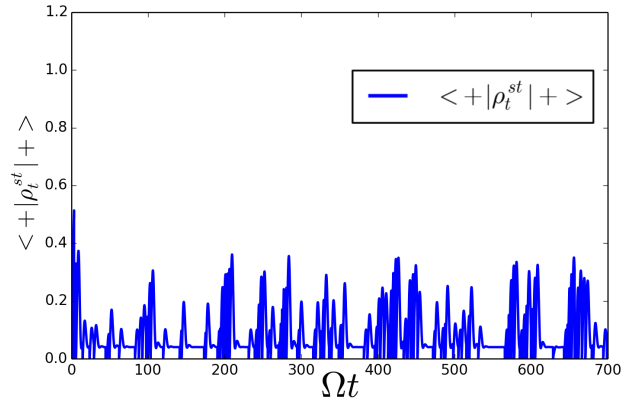


Figura 3.7: (a) “Survival” y (b) “waiting” como función de $\Omega(t - t')$, de la dinámica de un sistema fluorescente de dos niveles en el régimen óptico, en resonancia con un láser externo con parámetro de acoplamiento Ω y en contacto con un reservorio térmico estructurado y autofluotante entre dos estados mesoscópicos configuracionales $R = \{a, b\}$ cuando luego de cada detección, ocurrida en un tiempo t' , el sistema parte del estado separable $|-\rangle\langle -| | P_{t'}$ con estados configuracionales del baño $|P_{t'}\rangle = p|a\rangle + (1 - p)|b\rangle$, para valores $p = \{0, 0.5, 1\}$.

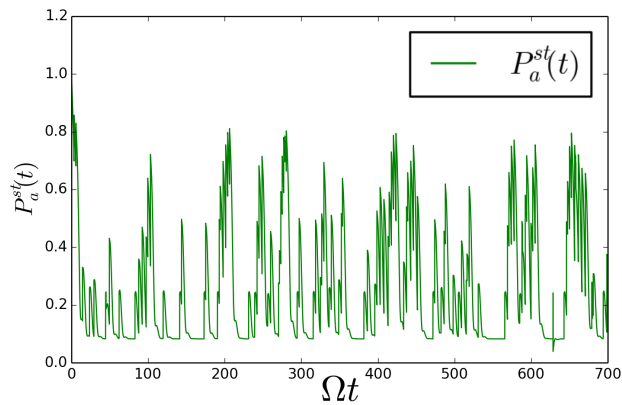
Vemos que, debido a la forma en cómo actúa nuestro operador matricial de medida [Ec.(3.84)], nuestro sistema siempre colapsa al mismo estado $|-\rangle\langle -|$, sin embargo este no es el caso para las poblaciones configuracionales [Ec.(3.84)]. Por lo tanto, cambios en dichos estados configuracionales del baño, afectan nuestra dinámica cuántica del sistema y esto se interpreta en distintas “waitings” y “survivals” en donde el parámetro configuracional p del baño cambia (Figs.(3.7)(a), y (3.7)(b)). Vemos que, debido a la similitud de los parámetros usados en esta tesis y la referencia [22], la dependencia temporal de las curvas se asemejan entre sí en ambos trabajos.

Esto es importante observarlo ya que a partir de la función de “survival”, cuando el baño va cambiando, generaremos nuestros intervalos aleatorios de detecciones de los fotones. Adicionalmente, observamos de forma inmediata que, a pesar de que luego de cada detección el sistema colapse al estado $|- \rangle$, se rompe la propiedad de proceso de renovación ya que nuestra función “waiting” depende además del estado configuracional del baño cuando dicha emisión fotónica es detectada.

A partir de la evolución condicional normalizada, Ec.(3.88), como actúa nuestro operador matricial de medida Ec.(3.84) sobre un estado vectorial cuántico arbitrario $|\rho\rangle$ y generando nuestros intervalos aleatorios entre detecciones a partir de la “survival”, obtenemos las realizaciones [Ec.(3.42)] del estado vectorial cuántico $|\rho_t^{st}\rangle$ [Fig.(3.8)].



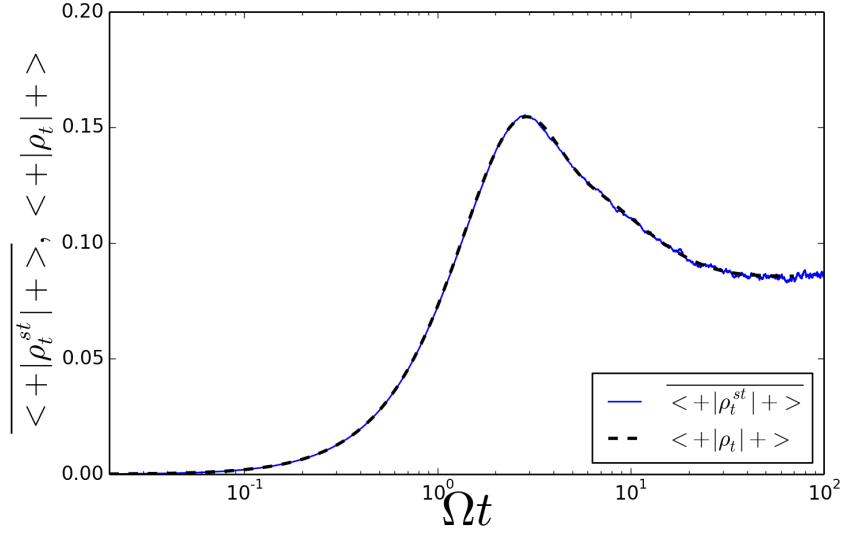
(a)



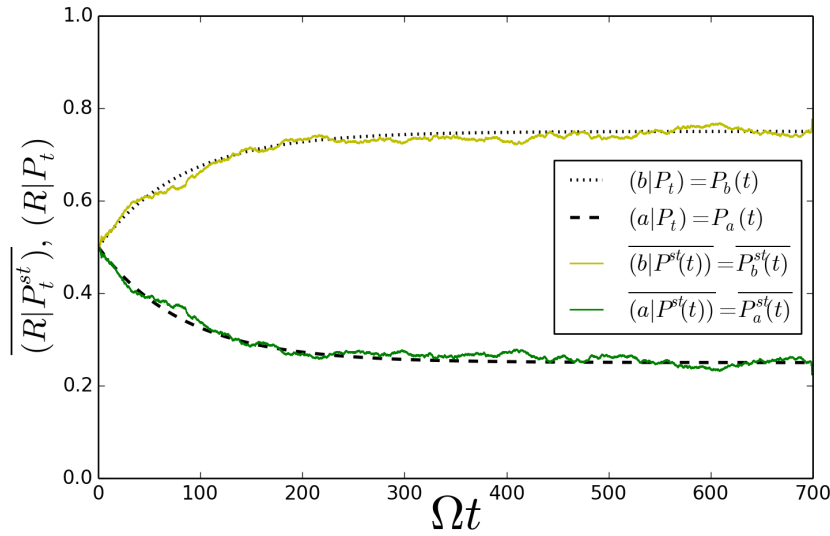
(b)

Figura 3.8: Realizaciones estocásticas para la dinámica del reservorio autofluctuante estudiado [Ec.(3.81)]. (a) Realización de la población superior del sistema $\langle +|\rho_t^{st}|+ \rangle$ y (b) realización de la población configuracional superior del baño ($a|P_a^{st}(t)$). Con valores de parámetros para tasas de decaimiento natural del sistema $\gamma_a/\Omega = 1$, $\gamma_b/\Omega = 10$ cuando el baño está en la configuración “a” o “b” respectivamente; tasas de transición entre configuraciones del baño “b \rightarrow a” $\gamma_{ab}/\Omega = 0.03$, “a \rightarrow b” $\gamma_{ba}/\Omega = 0.09$.

Finalmente, promediando sobre realizaciones vemos que se recupera la dinámica de Lindblad para el sistema y vemos además que las poblaciones configuracionales del baño recuperan la dinámica tipo ecuación maestra clásica (Fig: 3.9).



(a)



(b)

Figura 3.9: Promedio en 1020 realizaciones de (a) la población superior estocástica del sistema y (b) promedio sobre las poblaciones configuracionales del baño, cuando se prepara el sistema-baño en $|\rho_0\rangle = |-\rangle \propto -[1/2|a\rangle + 1/2|b\rangle]$, bajos los mismos parámetros de la Fig.(3.8).

Capítulo 4

Predicción y retrodicción

En el capítulo anterior estudiamos el método de saltos cuánticos. El mismo permite demostrar cómo es posible descomponer la dinámica de un sistema en una serie de trayectorias que en promedio recuperan dicha evolución. En particular, para sistemas fluorescentes, las trayectorias pueden asociarse a un proceso de detección de fotones. Así, el método de saltos cuánticos nos permite generar las trayectorias del proceso de medición. En esta sección, estudiaremos predicción y retrodicción. Dichas técnicas consisten en lo siguiente. Dado un sistema fluorescente experimental, el laboratorio nos provee los tiempos de emisión. A partir de estos datos debemos estimar el estado del sistema a una dado tiempo. Predicción es el caso en que solo se usan tiempos de emisión en el pasado, mientras que en retrodicción usamos ambos, tiempos de emisión en el pasado y en el futuro. Dado que no contamos con un experimento real, los resultados del capítulo anterior nos permiten generar numéricamente los mismos. El caso de predicción es totalmente equivalente a la formulación del método de saltos cuánticos, porque el mismo permite reconstruir el estado del sistema dados los resultados de las mediciones en el pasado. Así, en primer lugar reveremos este formalismo desde la presente perspectiva. Posteriormente, formularemos el caso de retrodicción.

4.1. Predicción

En secciones anteriores presentamos el método de saltos cuánticos para un sistema, en contacto con un reservorio estructurado. La dinámica microscópica total de este sistema-baño está escrita en términos del producto tensorial del espacio de Hilbert del sistema, el del campo electromagnético de fondo y el del espacio configuracional asociado a los microestados en que puede estar el baño. Una vez traceado el campo electromagnético, el arreglo híbrido clásico-cuántico que codifica tanto el estado del sistema y las configuraciones mesoscópicas del baño está dado por

$$\begin{aligned}
|\rho_t\rangle &\equiv \sum_R (R|\rho_t\rangle |R\rangle) \\
&= \sum_R P_t[R] \frac{(R|\rho_t\rangle)}{\text{Tr}[(R|\rho_t\rangle)]} |R\rangle,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\text{Tr}[\bullet]$ representa la traza parcial sobre el sistema S , y se introdujo la base ortonormal completa supuesta discreta $\{|R\rangle\}$, asociada a los estados configuracionales del baño. Las probabilidades clásicas de dichas configuraciones $P_R(t)$ [Ec.(2.56)], se reescriben (por conveniencia) como

$$P_R(t) \rightarrow P_t[R]. \tag{4.2}$$

La dinámica tipo Lindblad matricial generalizada de nuestro sistema híbrido (sistema y configuraciones del baño) está descrita por [Ec.(3.19)]

$$\frac{d}{dt} |\rho_t\rangle = \mathcal{L} |\rho_t\rangle \equiv (\mathcal{D} + \mathcal{J}) |\rho_t\rangle. \tag{4.3}$$

La separación \mathcal{D} , \mathcal{J} depende de cuál (o cuáles) serán nuestros superoperadores matriciales no-normalizados \mathcal{J} asociados a los aparatos de medidas que disponemos. A partir de estos superoperadores, se definen tanto el superoperador matricial de medida $\hat{\mathcal{M}}$ [Ec.(3.20)], como el propagador $\hat{\mathcal{T}}$ que define la evolución condicional normalizada entre detecciones [Ec.(3.27)].

Seguidamente, la solución formal de la Ec.(4.3), en series tipo Dyson [Ec.(3.34)], está dada por

$$|\rho_t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \overleftarrow{dt_n} e^{\mathcal{D}(t-t_n)} \mathcal{J} e^{\mathcal{D}(t_n-t_{n-1})} \dots e^{\mathcal{D}(t_2-t_1)} \mathcal{J} e^{\mathcal{D}t_1} |\rho_0\rangle, \tag{4.4}$$

donde los “tiempos de detecciones” $t^n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ocurridos previo al tiempo de observación “ t ”, y detectados por nuestro aparato de medida, se reescribieron como $t^n \rightarrow \overleftarrow{t}$. La integral anidada fue reescrita de forma compacta como

$$\int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} dt_n \dots dt_1 = \int_0^t \overleftarrow{dt_n}. \tag{4.5}$$

Interpretamos el integrando de la ecuación anterior como la acción de un propagador \mathcal{U} hasta tiempo “ t ” sobre el estado vectorial cuántico inicial $|\rho_0\rangle$, y a través de una trayectoria con n detecciones ocurridas a tiempos aleatorios \overleftarrow{t} ; podemos entonces

definir, de forma explícita, la acción de este propagador sobre un estado vectorial cuántico a tiempo arbitrario inicial como

$$\mathcal{U}[(t, t'); \overleftarrow{t}] | \rho_{t'} \rangle \equiv e^{\mathcal{D}(t-t_n)} \mathcal{J} e^{\mathcal{D}(t_n-t_{n-1})} \dots e^{\mathcal{D}(t_1-t')} | \rho_{t'} \rangle. \quad (4.6)$$

Si normalizamos posteriormente la trayectoria anterior [Ec.(4.6)] obtenemos que nuestro estado vectorial cuántico como solución de la ecuación Lindblad vectorial generalizada se reescribe

$$| \rho_t \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \overleftarrow{dt}_n P_t[\overleftarrow{t}] \mathcal{U}[(t, 0), \overleftarrow{t}_n] | \rho_0 \rangle. \quad (4.7)$$

La densidad de probabilidad conjunta de que ocurran n eventos \overleftarrow{t} en el pasado de t [Ec.(3.35)] se puede reescribir como

$$P_n[t, t^n] \rightarrow P_t[\overleftarrow{t}] \equiv \text{Tr}[(1 | \mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}] | \rho_0)]. \quad (4.8)$$

Los pasos previos nos definen el método de saltos cuánticos. Ahora, suponiendo que nuestros datos experimentales son los tiempos de emisión (aleatorios) \overleftarrow{t} , consistentemente, la *predicción* (estimación) del estado vectorial cuántico (estocástico) [Ec.(3.42)], está dada por

$$| \rho_t^{\text{st}} \rangle = \frac{\mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}] | \rho_0 \rangle}{\text{Tr}[(1 | \mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}] | \rho_0)]}. \quad (4.9)$$

A partir de la predicción del estado vectorial cuántico (estocástico) construido anteriormente, podemos obtener la predicción del estado de nuestro sistema e inferir las probabilidades configuracionales del baño como

$$\rho_t^{\text{st}} = (1 | \rho_t^{\text{st}}), \quad (4.10)$$

para el sistema, y

$$| P_t^{\text{st}} \rangle = \sum_R \text{Tr}[(R | \rho_t^{\text{st}})] | R \rangle, \quad (4.11)$$

para el baño, escrita de manera compacta en su forma vectorial. notar que en la expresión (4.9) hemos supuesto total conocimiento de la condición inicial, de la evolución de los estados auxiliares, y de todos sus parámetros correspondientes.

Finalmente, interpretando la Ec.(4.7) como un promedio en ensamble sobre trayectorias con detecciones ocurridas a tiempos \overleftarrow{t} previos a “ t ” y con pesos Ec.(4.8), vemos

que el estado vectorial cuántico inferido, satisface

$$|\rho_t\rangle = \overleftarrow{|\rho_t^{\text{st}}\rangle}, \quad (4.12)$$

donde la sobreflecha “ \leftarrow ” indica promedio sobre tiempos de emisión (en el pasado de “ t ”).

Como comentario final, a partir de la ecuación anterior, podemos decir que el término **predicción**, se refiere a que, a partir de los intervalos de tiempos entre detecciones (dados por nuestros aparatos de medidas o generados numéricamente a partir de la “waiting time” o, más precisamente, de la probabilidad de sobrevivencia), podemos *predecir* el estado vectorial cuántico de nuestro sistema híbrido [Ec.(4.9)].

4.2. Retrodicción

Basados en el formalismo de saltos cuánticos, vimos que es posible estimar el estado vectorial cuántico de nuestro sistema híbrido a partir de una trayectoria con detecciones ocurridas hasta un tiempo de observación “ t ”, y a partir del estado vectorial predecir tanto el estado de nuestro sistema como también predecir la evolución de las probabilidades configuracionales mesoscópicas del baño (*predicción*) [Ec.(4.9)]. En esta sección veremos que, tomando en cuenta las mediciones hasta un tiempo futuro a nuestro tiempo de estimación, es posible usar dicha información adicional para mejorar nuestras estimaciones hechas anteriormente; esto se conoce como **retrodicción** [16].

Permitiendo considerar los tiempos de emisión hasta un tiempo $T > t$, los eventos ocurridos entre t y T se escribirán como $\vec{t} \equiv \{t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_N\}$ (donde estos tiempos t_i satisfacen $t \leq t_i \leq T$). La probabilidad de ocurrencia de esta trayectoria tomando en cuenta el conjunto completo de tiempos de emisión $\overleftrightarrow{t} \equiv \overleftarrow{t} \cup \vec{t}$ durante la ventana $(0, T)$ es [Ec.(4.8)]

$$P_T[\overleftrightarrow{t}] \equiv \text{Tr} \left[(1 | \mathcal{U}[(T, t); \vec{t}] \mathcal{U}[(t, 0), \overleftarrow{t}] | \rho_0) \right], \quad (4.13)$$

donde hemos descompuesto trivialmente la trayectoria como propagación sobre el pasado de t , y propagación sobre el futuro de t hasta T . Este propagador sobre el futuro de t , se define de manera análoga a la ecuación (4.6) solo que esta vez tomando los tiempos de emisión \vec{t} .

El objeto definido anteriormente no es más que la densidad de probabilidad de ocurrencia de una trayectoria con n eventos \overleftarrow{t} ocurridos en el pasado de “ t ”, y “ $N-n$ ” eventos hasta un tiempo T ocurridos en el futuro de t . Este objeto cumple con la

normalización (tomando en cuenta todas las posibles trayectorias entre $(0, T)$)

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^T \overleftarrow{dt}_n \overrightarrow{dt}_m P_T[\overleftrightarrow{t}] \equiv 1, \quad (4.14)$$

donde por claridad se explicitó el número de eventos tanto en el pasado como en el futuro, $\overleftarrow{dt} \rightarrow \overleftarrow{dt}_n$, y $\overrightarrow{dt} \rightarrow \overrightarrow{dt}_m$, correspondientemente.

Seguidamente, introducimos la densidad de probabilidad conjunta para los tiempos de emisión y la configuración clásica R del baño a tiempo t ,

$$P_T[\overleftrightarrow{t}, R] \equiv \text{Tr} \left[(1 | \mathcal{U}[(T, t); \overrightarrow{t}] | R) (R | \mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}] | \rho_0) \right]. \quad (4.15)$$

Este objeto, además de cumplir propiedades de positividad y normalización, es una densidad de probabilidad conjunta en sus variables aleatorias ya que usando la propiedad de completitud de la base $\{R\}$ obtenemos que

$$P_T[\overleftrightarrow{t}] = \sum_R P_T[\overleftrightarrow{t}, R]. \quad (4.16)$$

También, si marginamos sobre todos los tiempos de emisión (pasado y futuro de t) obtenemos

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^T \overleftarrow{dt}_n \overrightarrow{dt}_m P_T[\overleftrightarrow{t}, R] = \text{Tr}[(R | \rho_t)] = P_t[R]. \quad (4.17)$$

Si introducimos la probabilidad condicional $P_T[R | \overleftrightarrow{t}]$ de que el baño a tiempo t esté en el estado configuracional R dado que ocurrió la detección de tiempos $\{\overleftrightarrow{t}\}$, por la regla de Bayes obtenemos la relación

$$P_T[\overleftrightarrow{t}, R] = P_T[R | \overleftrightarrow{t}] P_T[\overleftrightarrow{t}]. \quad (4.18)$$

De este modo, desde la Ec.(4.15), $P_T[R | \overleftrightarrow{t}]$ se puede escribir como

$$P_T[R | \overleftrightarrow{t}] = \frac{\text{Tr} (1 | \mathcal{U}[(T, t); \overrightarrow{t}] | R) (R | \mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}] | \rho_0)}{\sum_R \text{Tr} \left[(1 | \mathcal{U}[(T, t); \overrightarrow{t}] | R) (R | \mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}] | \rho_0) \right]}. \quad (4.19)$$

A diferencia de predicción, el objeto anterior nos da la probabilidad configuracional del baño usando tiempos de emisiones tanto en el pasado como en el futuro, esto es *retro-dicción*. De hecho, predicción se recupera cuando $T = t$, dando lugar a $\mathcal{U}[(T, t); \overrightarrow{t}] \rightarrow \text{I}$.

Así, la expresión anterior se reduce a

$$P_t[R|\overleftarrow{t}] = \frac{\text{Tr}(1||R)(R|\mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}]|\rho_0)}{\sum_R \text{Tr}(1||R)(R|\mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}]|\rho_0)} \quad (4.20a)$$

$$= \frac{\text{Tr}(R|\mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}]|\rho_0)}{\sum_R \text{Tr}(R|\mathcal{U}[(t, 0); \overleftarrow{t}]|\rho_0)} = \text{Tr}(R|\rho_t^{\text{st}}). \quad (4.20b)$$

Las probabilidades condicionadas (una para cada R) [Ec.(4.19)], serán nuestros objetos a ser estimados para cada una de las realizaciones de tiempos \overleftrightarrow{t} que dispongamos (en nuestro caso, generados numéricamente como hemos venido haciendo durante el desarrollo de esta tesis, o que estos tiempos de emisión sean provistos experimentalmente por un detector de fotones u otro aparato de medición registrando eventos al que esté acoplado el sistema que estemos estudiando).

A partir de la probabilidad condicionada [Ec.(4.19)], se puede introducir un **estado vectorial cuántico suavizado** a tiempo t , $|\rho_{t,T}^{\text{st}}\rangle$ definido como [16]

$$|\rho_{t,T}^{\text{st}}\rangle \equiv \sum_R P_T[R|\overleftrightarrow{t}] \frac{(R|\rho_t^{\text{st}})}{\text{Tr}[(R|\rho_t^{\text{st}})]} |R\rangle. \quad (4.21)$$

Este estado vectorial así definido puede interpretarse como la generalización del estado vectorial cuántico y estocástico estimado por predicción $|\rho_t^{\text{st}}\rangle$, pero ahora usando además la información del futuro (mediciones) de t hasta T . Notar que la expresión anterior sigue del cambio formal $P_t[R|\overleftarrow{t}] \rightarrow P_T[R|\overleftrightarrow{t}]$, esto es, un cambio en los pesos de los estados condicionados (normalizados) [ver Ec.(4.1)].

Es importante destacar que el estado vectorial cuántico suavizado $|\rho_{t,T}^{\text{st}}\rangle$ [Ec.(4.21)], inferido con la técnica de retrodicción, es diferente del estado vectorial cuántico $|\rho_T^{\text{st}}\rangle$ inferido mediante predicción [Ec.(4.9)] a tiempo T . Aún, cuando en ambos casos estamos usando toda la realización de tiempos \overleftrightarrow{t} en el intervalo $(0, T)$, ambos objetos son formalmente diferentes. El primero de éstos (el inferido con retrodicción), provee una estimación suavizada del estado del sistema a tiempo $t \leq T$ usando, además, información del futuro (datos experimentales en el intervalo (t, T)). El mismo se define por un cambio en las probabilidades configuracionales del baño, las cuales están ahora condicionadas a las realizaciones completa de tiempos $(P_T[R|\overleftrightarrow{t}]$, Ec.(4.19)). En cambio, $|\rho_T^{\text{st}}\rangle$ es la estimación del sistema a tiempo $T \geq t$. Es decir, ambos objetos ($|\rho_{t,T}^{\text{st}}\rangle$, $|\rho_T^{\text{st}}\rangle$), a pesar de que usan toda la realización \overleftrightarrow{t} , son estimaciones del estado del sistema pero a tiempos diferentes y contruidos de forma diferente.

En analogía con resultados anteriores, a partir de los estados vectoriales, podemos inferir la estimación estocástica suavizada tanto del estado del sistema,

$$\rho_{t,T}^{\text{st}} = (1|\rho_{t,T}^{\text{st}}), \quad (4.22)$$

como de las probabilidades configuracionales del baño,

$$|P_{t,T}^{\text{st}}\rangle = \sum_R \text{Tr}[(R|\rho_{t,T}^{\text{st}}\rangle) |R\rangle. \quad (4.23)$$

Se puede demostrar [16] que al promediar sobre tiempos futuros, denotado con la sobre flecha \rightarrow , obtenemos

$$|\overrightarrow{\rho_{t,T}^{\text{st}}}\rangle = |\rho_t^{\text{st}}\rangle, \quad (4.24)$$

y consecuentemente también

$$\overrightarrow{\rho_{t,T}^{\text{st}}} = \rho_t^{\text{st}}, \quad |\overrightarrow{P_{t,T}^{\text{st}}}\rangle = |P_t^{\text{st}}\rangle. \quad (4.25)$$

Esto es, fijando una realización del pasado, el promedio sobre posibles realizaciones futuras recupera predicción. De lo anterior, si promediamos sobre mediciones en el pasado y futuro de t , denotado por la sobre-flecha \leftrightarrow , recuperamos la evolución determinista dada por la ecuación de Lindblad vectorial

$$|\overleftrightarrow{\rho_{t,T}^{\text{st}}}\rangle = |\rho_t\rangle, \quad (4.26)$$

y consecuentemente también

$$\overleftrightarrow{\rho_{t,T}^{\text{st}}} = \rho_t, \quad |\overleftrightarrow{P_{t,T}^{\text{st}}}\rangle = |P_t\rangle, \quad (4.27)$$

esto es, se recupera la evolución no-Markoviana del sistema y la dinámica determinista de la probabilidades del baño.

4.2.1. Estado vectorial cuántico de pasado

La expresión que obtuvimos anteriormente para la probabilidad configuracional condicionada del baño [Ec.(4.19)], puede reescribirse de forma clara y elegante introduciendo operadores duales de la evolución estocástica. De esta forma, definiremos el propagador dual $\mathcal{U}^\#$ por la siguiente igualdad

$$\text{Tr}(A|\mathcal{U}|\rho) = \text{Tr}(\rho|\mathcal{U}^\#|A), \quad (4.28)$$

donde $|\rho\rangle$ y $|A\rangle$, son estados y operadores vectoriales arbitrarios.

A partir de este operador dual $\mathcal{U}^\#$, se define [16] el operador vectorial de efecto (vectorial effect operator)

$$|E_t^{\text{st}}\rangle \equiv \mathcal{U}^\#[(T, t); \overrightarrow{t}]|I\rangle, \quad (4.29)$$

donde $|I\rangle \equiv |1\rangle$, con “ I ” el operador identidad sobre el espacio de Hilbert del sistema. Usando que $\text{Tr}[(A|\mathcal{UV}|\rho)] = \text{Tr}[(\rho|\mathcal{V}^\# \mathcal{U}^\#|A)]$, a partir de la Ec.(4.6), vemos que

$$\mathcal{U}^\#[(t, t'); \overleftarrow{t}] = e^{\mathcal{D}^\#(t_1-t')} \mathcal{J}^\# e^{\mathcal{D}^\#(t_2-t_1)} \mathcal{J}^\# \dots e^{\mathcal{D}^\#(t_n-t_{n-1})} \mathcal{J}^\# e^{\mathcal{D}^\#(t-t_n)}, \quad (4.30)$$

donde los operadores $\{\mathcal{D}^\#, \mathcal{J}^\#\}$ son los operadores duales de $\{\mathcal{D}, \mathcal{J}\}$ [19].

Usando la relación

$$\text{Tr}[(1|\mathcal{U}[(T, t); \overrightarrow{t}]|\rho)] = \text{Tr}[(\rho|\mathcal{U}^\#[(T, t); \overrightarrow{t}]|I)], \quad (4.31)$$

la probabilidad condicionada $P_T[R|\overleftarrow{t}]$ [Ec.(4.19)], puede escribirse como

$$P_T[R|\overleftarrow{t}] = \frac{\text{Tr}[(\rho_t^{\text{st}}|R)(R|E_t^{\text{st}})]}{\sum_R \text{Tr}[(\rho_t^{\text{st}}|R)(R|E_t^{\text{st}})]}. \quad (4.32)$$

La expresión anterior queda escrita en forma compacta en términos del estado de predicción $|\rho_t^{\text{st}}\rangle$ y el operador vectorial de efecto $|E_t^{\text{st}}\rangle$. Siguiendo la denominación de la Ref. [7], el par $\Xi = \{|\rho_t^{\text{st}}\rangle, |E_t^{\text{st}}\rangle\}$ nos define el *estado vectorial de pasado* (past vectorial state). En esta notación, toda la información de las mediciones del pasado están encapsuladas en $|\rho_t^{\text{st}}\rangle$, mientras que toda la información del futuro está contenida en $|E_t^{\text{st}}\rangle$. Cuando el futuro es descartado, $|E_t^{\text{st}}\rangle \rightarrow |I\rangle$, lo cual recupera predicción en su forma standard.

4.3. Pureza cuántica (sistema) y configuracional (baño)

Para comparar la ventaja que trae usar el proceso de retrodicción sobre la estimación con predicción de un estado vectorial, usaremos las purzas tanto del sistema como del baño, directamente calculadas para cada realización, como así también sus promedios sobre un ensamble de mediciones (realizaciones).

Las purzas promedio del sistema cuántico, usando predicción y retrodicción, respectivamente son

$$\mathcal{P}_t^{(S)} = \overleftarrow{\text{Tr}[(\rho_t^{\text{st}})^2]}, \quad \mathcal{P}_{t,T}^{(S)} = \overleftarrow{\text{Tr}[(\rho_{t,T}^{\text{st}})^2]}, \quad (4.33)$$

donde $\text{Tr}[(\rho_t^{\text{st}})^2]$, y $\text{Tr}[(\rho_{t,T}^{\text{st}})^2]$ representan las realizaciones de las purzas del sistema, para predicción como para retrodicción respectivamente. Como antes, la sobre-flecha $\overleftarrow{}$, denota un promedio sobre el pasado (realizaciones de las mediciones a tiempos an-

teriores), mientras que la sobre-flecha \leftrightarrow denota promedio tanto sobre el pasado como el futuro.

De forma análoga, se define la pureza promedio de los grados de libertad clásicos del baño usando predicción y retrodicción como

$$\mathcal{P}_t^{(C)} = \overleftarrow{(a|P_t^{\text{st}})^2 + (b|P_t^{\text{st}})^2}, \quad \mathcal{P}_{t,T}^{(C)} = \overleftrightarrow{(a|P_{t,T}^{\text{st}})^2 + (b|P_{t,T}^{\text{st}})^2}, \quad (4.34)$$

donde $(a|P_t^{\text{st}})^2 + (b|P_t^{\text{st}})^2$ y $(a|P_{t,T}^{\text{st}})^2 + (b|P_{t,T}^{\text{st}})^2$, representan las realizaciones de la pureza del baño para predicción y retrodicción, respectivamente. Notar que la pureza de los estados configuracionales del baño toma su máximo valor (1) cuando se conoce con certeza en que estado está.

4.4. Retrodicción en sistemas fluorescentes acoplados a baños auto-fluctuantes

El formalismo anterior fue aplicado a un sistema cuántico fluorescente acoplado a un reservorio autofluctuante, esto es, donde las transiciones entre sus distintos estados obedecen una ecuación maestra clásica. La ecuación de Lindblad vectorial fue descrita en el Capítulo 2 [Ec.(2.61)]. El proceso de medición consiste en la detección de fotones producidos por la interacción del sistema cuántico con un láser externo. Dada la ausencia de un laboratorio para realizar el experimento, la generación de los tiempos aleatorios de detección se generó con el método de saltos cuánticos, tal como se describió en el Capítulo 3.

En los siguientes gráficos, generamos una realización de los tiempos de emisión en el intervalo $(0, T)$. Posteriormente, aplicamos predicción y retrodicción a un tiempo t , con $0 < t < T$. Para que dichas estimaciones sean equivalentes, para cada t tomamos un T variable tal que $T - t = cte$. Al igual que en los capítulos anteriores, el baño está caracterizado por dos estados configuracionales, denotados por a y b .

En la Fig.(4.1) mostramos la estimación de las poblaciones del baño, usando tanto predicción [Ec.(4.11)] (línea azul) como retrodicción [Ec.(4.19)] (línea roja). En este último caso se observa una disminución de las fluctuaciones, o sea, la realización es más suave. Por otro lado, retrodicción anticipa las posibles transiciones entre estados configuracionales. Esto es, las transiciones en las líneas rojas ocurren a tiempos anteriores que para las líneas azules.

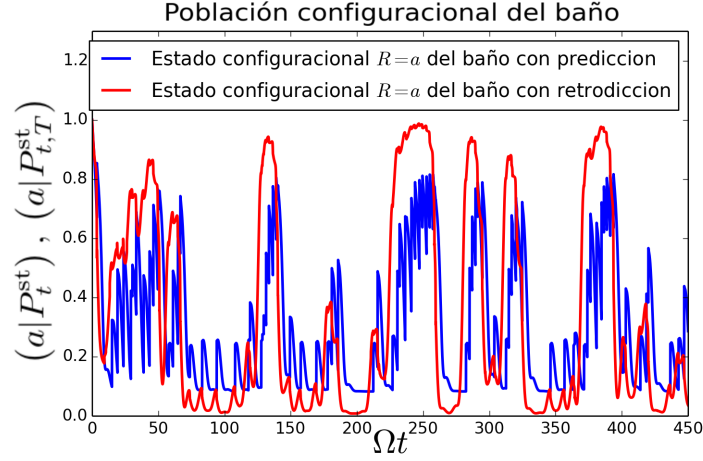


Figura 4.1: Realización estocástica del baño para el estado configuracional $R = a$ usando predicción (azul) y retrodicción (rojo). Los parámetros son $\gamma_a/\Omega = 1$, $\gamma_b/\Omega = 10$, $\gamma_{ab}/\Omega = 0.03$, $\gamma_{ba}/\Omega = 0.09$. La condición inicial del estado vectorial es $|\rho_0^{\text{st}}\rangle = |-\rangle\langle -|a\rangle$. Para retrodicción, a cada tiempo t , se tomó T tal que $\Omega(T - t) = 20$.

El efecto de suavizado puede mostrarse o cuantificarse mediante la pureza correspondiente [Eq.(4.34)], la cual mostramos en la siguiente figura [Fig.(4.2)]. Notar que un incremento en la pureza implica tener información más precisa sobre el estado del baño.

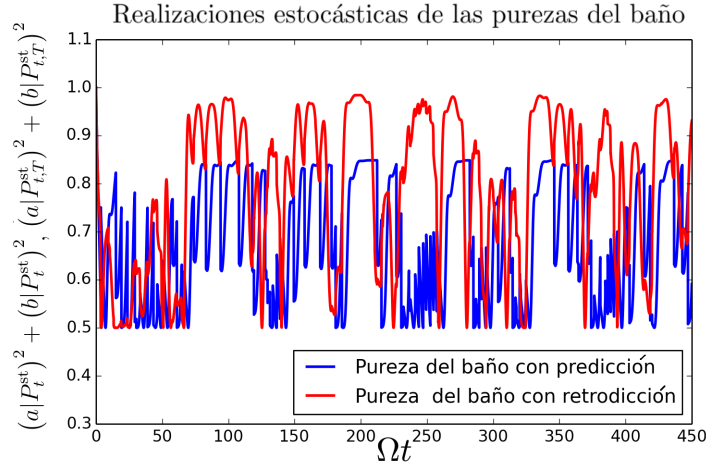


Figura 4.2: Realización de la pureza del baño, usando predicción (azul) y retrodicción (rojo). Los parámetros y condición inicial son los mismos que en la figura anterior.

Aquí se aprecia que en la mayoría del intervalo de tiempo mostrado, la pureza de la estimación de los estados del baño es más cercana al valor (1) cuando se aplica retrodicción.

Los observables anteriores también pueden definirse para el sistema cuántico. En la

siguiente figura [Fig.(4.3)], para el mismo set de tiempos de detección, mostramos la población superior del sistema, tanto para predicción (línea azul) como usando retrodicción (línea roja).

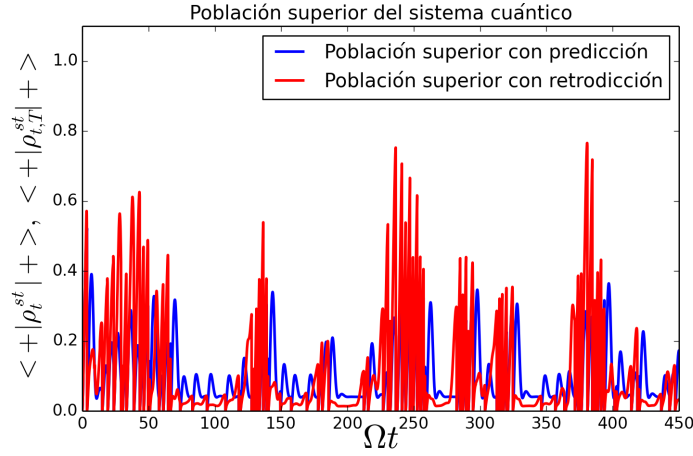


Figura 4.3: Realización de la población superior del sistema, con predicción y retrodicción. Los parámetros y condición inicial son los mismos que en las figuras anteriores.

La pureza correspondiente a la matriz densidad del sistema las mostramos en la Fig.(4.4).

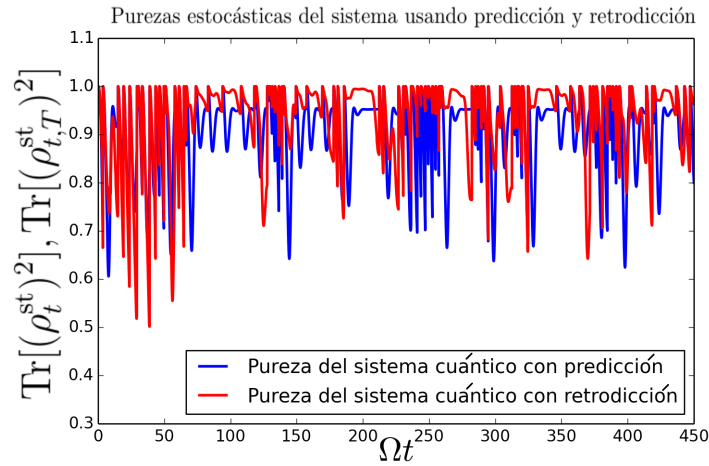
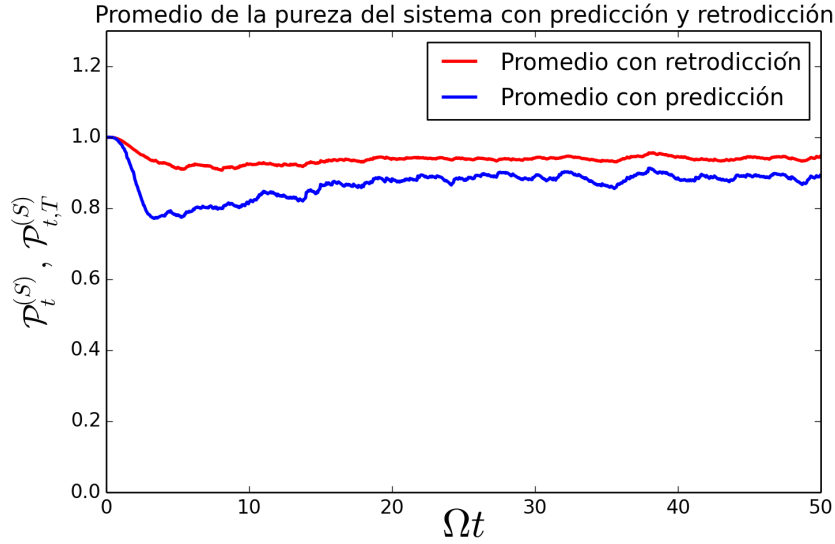


Figura 4.4: Realización de la pureza del sistema, usando tanto predicción (azul) como retrodicción (rojo).

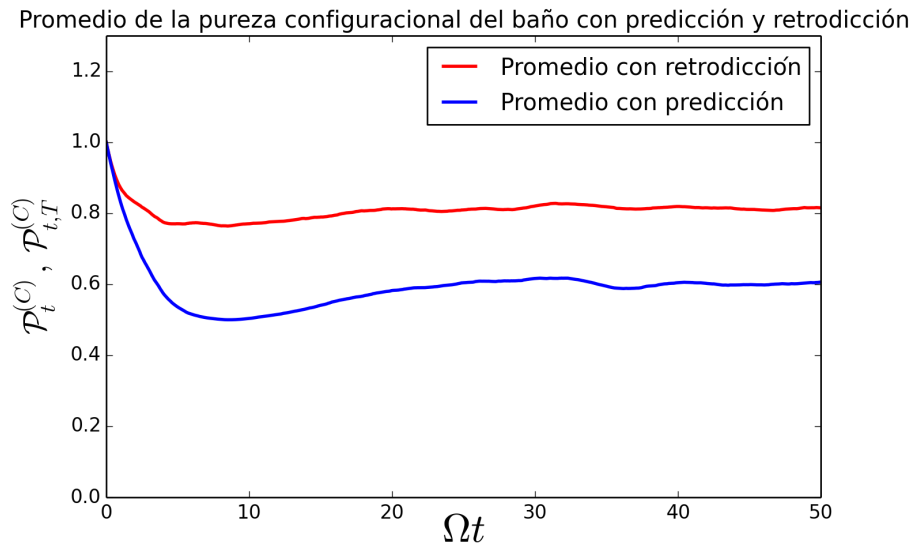
Aquí, al igual que para la poblaciones del reservorio, con retrodicción se alcanza una pureza más cercana a (1).

A partir de las realizaciones anteriores se observa que los estados obtenidos con retrodicción no siempre (a todo tiempo) son más puros que los estados estimados usando

solo predicción. Sin embargo, esta característica es válida a todo tiempo al promediar sobre distintas realizaciones del proceso de medición. Este hecho lo mostramos en la Fig.(4.5).



(a)



(b)

Figura 4.5: Purezas promedio (300 realizaciones) para el sistema S (a), y promedio de la pureza configuracional del baño C (b) ambas usando tanto el método de predicción como retrodicción.

Podemos observar que de hecho con la retrodicción, esto es, el uso de información del resultado de mediciones en el futuro, permite obtener mejores estimaciones de los estados tanto del sistema como de las configuraciones del baño. De hecho, un incremento en la pureza de un estado siempre implica tener más información sobre el mismo.

Es de notar que esta mejoría en la pureza del sistema cuántico usando el método de retrodicción versus predicción en las situaciones físicas descritas en las referencias [15] y [16], son similares a las obtenidas en esta tesis (Fig.4.5(a)). De esta similitud concluimos que la no-Markovianidad del sistema no influye sustancialmente en la mejoría obtenida usando el método de retrodicción. Adicionalmente, en este trabajo vimos que esta mejoría también ocurre para el promedio de las purezas de los estados configuracionales del baño (Fig.4.5 (b)).

Capítulo 5

Conclusiones

Para realizar los objetivos de la tesis, fue necesario estudiar y explorar distintos formalismos de la teoría de sistemas cuánticos abiertos. En el *capítulo 2*, repasamos el formalismo de ecuaciones de Lindblad. Dichas evoluciones tienen en cuenta tanto la evolución unitaria (reversible en el tiempo) como así también efectos de irreversibilidad temporal inducida por la interacción con grados de libertad no controlables (baño o reservorio). Para sistemas ópticos el reservorio está efectivamente a temperatura cero. La interacción con un láser externo da lugar a fluorescencia, esto es, una emisión permanente y aleatorio de fotones. Nuestro *sistema de interés central* fue el caso en que el baño está caracterizado por diferentes estados configuracionales, cada uno de los cuales afecta la dinámica del sistema. El sistema conjunto (híbrido) sistema-cuántico más estados configuracionales del baño es descrito por un vector de estado. Cada una de sus componentes representa el estado del sistema condicionado a un dado estado configuracional del baño. Consecuentemente, la ecuación de Lindblad adquiere una forma vectorial correspondiente. Al marginar los grados configuracionales, la dinámica del sistema no puede escribirse en forma local en el tiempo, esto es, la dinámica cuántica presenta efectos de *memoria temporal*.

En el *capítulo 3* estudiamos una herramienta central en el desarrollo de la tesis, esto es, el método de saltos cuánticos para ecuaciones de Lindblad vectoriales. Mediante una expansión tipo Dyson, es posible expresar la dinámica del estado vectorial como una suma sobre realizaciones de un proceso de medición efectuado sobre el sistema. Esta relación se establece reconociendo un término en la ecuación de Lindblad (vectorial) como un operador de medición generalizado. El formalismo permite obtener y caracterizar la densidad de probabilidad para cada realización, y por lo tanto definir un método numérico para su implementación.

Comprobamos que para un sistema fluorescente, la detección de fotones es un proceso de renovación. Esto es, la estadística del tiempo entre detecciones es siempre la misma, estando definida por una función de espera (waiting time distribution). Cuan-

do el baño está caracterizado por diferentes estados configuracionales, la estadística es similar. Sin embargo, la función de espera depende de un parámetro extra, el cual asume valores aleatorios a lo largo de una realización. Para estos casos, también se comprobó que, consistentemente, promediando sobre realizaciones se obtiene la dinámica dictada por la ecuación de (vectorial) Lindblad correspondiente.

En el *capítulo 4* expusimos la base teórica que nos permite formular lo que es predicción y retrodicción. *Predicción* se refiere a inferir el estado de un sistema (estado vectorial en general) continuamente monitoreado en el tiempo usando los resultados del aparato de medida previos al presente. Por otro lado *retrodicción* se refiere a inferir el estado usando la información de una trayectoria de medición tanto del pasado como del futuro.

Del análisis realizado en el capítulo 3, se puede inferir que predicción es equivalente al método de saltos cuánticos. En vez de generar trayectorias, aquí predicción significa, dada una realización del aparato de medida, reconstruir el estado del sistema en el presente. Para formular retrodicción, se calculan las probabilidades condicionadas de los estados configuracionales del baño para una dada realización que incluye resultados tanto del pasado como del futuro. Este cálculo se realiza en base a la probabilidad de la trayectoria total y la regla de Bayes. El estado vectorial suavizado asociado se formula a través del estado (vectorial) de predicción luego de cambiar las probabilidades de los estados del baño por sus estimaciones con retrodicción.

Dada la base descripta anteriormente, estudiamos la dinámica propuesta, esto es, un sistema fluorescente en contacto con un baño dotado de dos estados configuracionales, cada uno de los cuales afecta el decaimiento natural del mismo. Estudiamos predicción y retrodicción en dicha dinámica. Para ello implementamos programas computacionales tanto para describir el comportamiento en ensamble (ecuación de Lindblad vectorial) como así también para la obtención de las trayectorias de medición (saltos cuánticos). A partir de los resultados obtenidos para esta dinámica, comprobamos que retrodicción mejora la estimación tanto de los estados configuracionales del baño como así también el estado del sistema. Para ello estudiamos el comportamiento de sus purezas. Aunque en cada realización el comportamiento no es definitivo, al promediar sobre realizaciones efectivamente observamos una mejora en las purezas. Esto es, los estados son más puros, lo cual implica que retrodicción nos acerca a una predicción de máxima información o de mínima entropía posible.

Finalmente, debemos destacar que las técnicas estudiadas como así también los análisis realizados están inmersos en el contexto de recientes progresos realizados en la literatura especializada [5, 7, 15, 16]. Además de estudiar un caso inexplorado (retrodicción en un sistema fluorescente no-Markoviano acoplado a un baño auto-fluctuante), el presente trabajo puede ser extendido hacia distintos problemas de interés. Por ejemplo, queda por analizar el caso en que la dinámica de los estados configuracionales

está estrechamente correlacionada con la dinámica del sistema. Por otro lado, independientemente de la dinámica subyacente, estudiar la fidelidad entre el estado de máxima información (se mide sistema y también estados configuracionales) con el estado obtenido vía retrodicción. Aunque el aumento de la pureza es un fuerte indicativo de la ganancia de información obtenida, la distancia entre dichos estados daría una confirmación extra sobre la conveniencia de introducir retrodicción.

Bibliografía

- [1] P., B. H., Petruccione. The theory of open quantum systems. *Oxford University Press*, 2004. [1](#), [2](#), [4](#), [12](#), [13](#), [14](#), [16](#), [19](#), [22](#), [34](#), [44](#), [50](#)
- [2] Carmichael, H. J. An open systems approach to quantum optics. *Lecture Notes in Physics*, **M18**, 1993. [12](#), [51](#)
- [3] Plenio, M. B., Knight, P. L. The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.*, **101**, 1998.
- [4] Wiseman, H. M., Milburn, G. J. Quantum measurement and control. Cambridge University press, 2010. [1](#), [2](#), [4](#), [14](#), [19](#), [34](#), [50](#)
- [5] Tsang, M. Time-symmetric quantum theory of smoothing. *Phys. Rev. Lett.*, **102** (250403), 2009. [2](#), [76](#)
- [6] Tsang, M. Optimal waveform estimation for classical and quantum systems via time-symmetric smoothing. *Phys. Rev. A*, **80** (033840), 2009.
- [7] Gammelmark, S., Julsgaard, B., Molmer, K. Past quantum states of a monitored system. *Phys. Rev. Lett.*, **111** (130401), 2013. [68](#), [76](#)
- [8] Gammelmark, S., Molmer, K., Alt, W., Kampschulte, T., Meschede, D. Hidden Markov model of atomic quantum jump dynamics in an optically probed cavity. *Phys. Rev. A*, **89** (043839), 2014.
- [9] Tan, D., Weber, S. J., Siddiqi, I., Molmer, K., Murch, K. W. Prediction and retrodiction for a continuously monitored superconducting qubit. *Phys. Rev. Lett.*, **114** (090403), 2015.
- [10] Rybarczyk, T., Peaudecerf, B., Penasa, M., Gerlich, S., Julsgaard, B., Molmer, K., *et al.* Forward-backward analysis of the photon-number evolution in a cavity. *Phys. Rev. A*, (062116), 2015.
- [11] Xu, Q., Greplova, E., Julsgaard, B., Molmer, K. Correlation functions and conditioned quantum dynamics in photodetection theory. *Phys. Scr.*, **90** (128004), 2015.

- [12] Tan, D., Naghiloo, M., Molmer, K., Murch, K. W. Quantum smoothing for classical mixtures. *Phys. Rev. A*, **94** (050102(R)), 2016.
- [13] Foroozani, N., Naghiloo, M., Tan, D., Molmer, K., Murch, K. W. Correlations of the time dependent signal and the state of a continuously monitored quantum system. *Phys. Rev. Lett.*, **116** (110401), 2016.
- [14] Campagne-Ibarcq, P., Bretheau, L., Flurin, E., Auffèves, A., Mallet, F., Huard, B. Observing interferences between past and future quantum states in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, (180402), 2014.
- [15] Guevara, I., Wiseman, H. Quantum state smoothing. *Phys. Rev. Lett.*, **115** (180407), 2015. [4](#), [73](#), [76](#)
- [16] Budini, A. A. Smoothed quantum-classical states in time-irreversible hybrid dynamics. *Physical Review A*, **96** (032118), 2017. [2](#), [4](#), [64](#), [66](#), [67](#), [73](#), [76](#)
- [17] Budini, A. A. Open quantum system approach to single-molecule spectroscopy. *Physical Review A*, **79** (043804), 2009. [3](#), [22](#), [23](#), [24](#), [27](#), [29](#), [53](#)
- [18] Budini, A. A. Lindblad rate equations. *Physical Review A*, **74** (053815), 2006. [3](#), [22](#), [23](#), [24](#)
- [19] Budini, A. A. Operator correlations and quantum regression theorem in non-Markovian Lindblad rate equations. *J. Stat. Phys.*, **131** (51), 2008. [3](#), [68](#)
- [20] Shankar, R. Principles of quantum mechanics. 2d ed. En: Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics. Klower Academic/Plenum Publishers, 1995. [3](#), [10](#)
- [21] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. Quantum computation and quantum information, tomo 56. Cambridge University Press, 2000. [3](#), [31](#), [32](#)
- [22] Budini, A. A. Quantum jumps and photon statistics in fluorescent systems coupled to classically fluctuating reservoirs. *J. Phys. B*, **43** (115501), 2010. [3](#), [28](#), [39](#), [40](#), [41](#), [44](#), [57](#), [58](#)
- [23] Fano, U. Description of states in quantum mechanics by density and operator techniques. *Review of Modern Physics*, **29**, 1957. [7](#)
- [24] Carmichael, H. J., Singh, S., Vyas, R., Rice, P. R. Photoelectron waiting times and atomic state reduction in resonance fluorescence. *Phys. Rev. A*, **39** (1200), 1989. [51](#)

Agradecimientos

Cuando el viento sopla fuerte, es el momento en que mayor lucidez debes tener, aferrarte al timón y seguir navegando. Este momento difícil es solo temporal.

Sobretudo no olvidar a quienes se mantuvieron siempre a tu lado, apoyándote en todo momento. Todas estas personas, muy especiales, son quienes me marcaron de la forma más linda posible. Los recordaré.

Le agradezco en primer lugar a mi director Adrián Budini, que en esta última etapa estuvo luchando conmigo y sin perder de vista la meta que nos habíamos marcado. Los hechos y acciones de las personas hablan por sí solas cuando es el momento decisivo. Gracias.

Le agradezco mucho a mi amiga Carolina Daza, quien junto a mi amigo Rodrigo Cárdenas estuvieron siempre dándome su apoyo incondicional. Le agradezco a mi amiga María Fonseca, sus bellas palabras de aliento me hicieron notar que existe una fortaleza y espíritu luchador en mí que muchas veces se me dificulta ver. Le agradezco a mi amiga Melisa Capitán, quien tuvo conmigo muchos detalles lindos dignos de recordar. A mi amiga Laila Kazimierski que muchas de las veces cuando necesitaba alguien con quien hablar, no dudaba en prestarme su atención y compartir nuestras historias. Y también debo agradecerles al resto de ustedes (tanto alumnos como profesores) del grupo “FiEstIn”, fueron una hermosa familia con quienes me gustó mucho compartir y crecer. Espero poder seguir viéndolos si es que mi camino será este u otro.

Les agradezco finalmente quienes no nombro acá pero que saben lo muy agradecido que estoy con ustedes. Ayudaron a hacer esto posible.

Un abrazo a todos. Los quiere mucho

Alan

